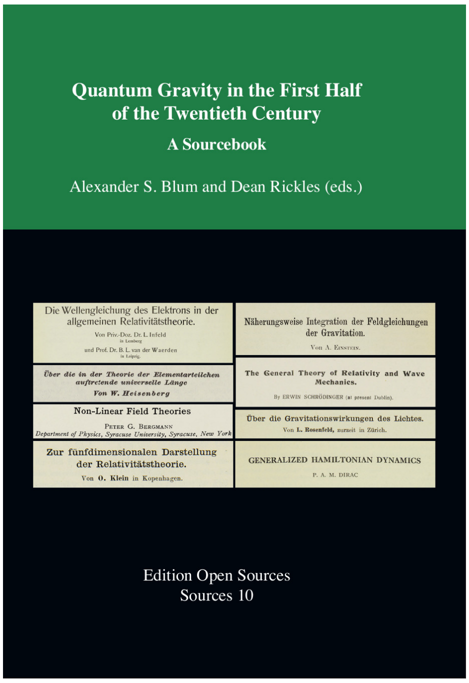
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Léon Rosenfeld (1930): Über die Gravitationswirkungen des Lichts
DOI: 10.34663/9783945561317-21



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 19
Léon Rosenfeld (1930): Über die Gravitationswirkungen des Lichts

Léon Rosenfeld (1930). Über die Gravitationswirkungen des Lichts. *Zeitschrift für Physik*, 65: 589–599.

Über die Gravitationswirkungen des Lichtes.

Von **L. Rosenfeld**, zurzeit in Zürich.

(Eingegangen am 26. September 1930.)

Es wird das von einem elektromagnetischen Felde erzeugte Gravitationsfeld quantenmechanisch berechnet und gezeigt, daß die so entstandene Gravitationsenergie unendlich groß herauskommt, was eine neue Schwierigkeit für die Heisenberg-Paulische Quantelungstheorie der Wellenfelder bedeutet. Ferner werden die in erster Näherung möglichen Übergangsprozesse, an denen sich Licht- und Gravitationsquanten beteiligen, kurz erörtert.

Das Auftreten einer unendlich großen Selbstenergie des Elektrons bereitet bekanntlich* der Quantenelektrodynamik ernste Schwierigkeiten. Heisenberg hat die Frage aufgeworfen, ob nicht etwa schon unabhängig von jedem materiellen Einfluß, bei den Gravitationswirkungen des Lichts, analoge Verhältnisse herrschen. Die Antwort läßt sich nicht ohne weiteres durch Vergleich mit dem Verhalten des Elektrons erraten, da hier die Retardierung nicht vernachlässigt werden darf. Vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung dieser Frage.

*1. Das von einem elektromagnetischen Felde erzeugte Gravitationsfeld in erster Näherung***. Bezeichnet $\varkappa = 8\pi f/c^4$ die Einsteinsche Gravitationskonstante (f = Newtonsche Konstante), so wollen wir annehmen, daß die in Betracht kommenden Gravitationsfelder so wenig von dem Minkowskischen abweichen, daß wir sie nach Potenzen von $\varepsilon = \sqrt{\varkappa}$ entwickeln können und nur die in ε linearen Glieder zu berücksichtigen brauchen. In kartesischen Koordinaten x^1, x^2, x^3, $x^4 = ict$ können wir also schreiben:

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon \gamma_{ik}. \tag{1}$$

Setzen wir

$$\gamma = \sum_i \gamma_{ii} \tag{2}$$

und

$$\gamma'_{ik} = \gamma_{ik} - \tfrac{1}{2}\delta_{ik}\gamma, \tag{3}$$

---

* Vgl. W. Heisenberg u. W. Pauli, ZS. f. Phys. **56**, 1, 1929; R. Oppenheimer, Phys. Rev. **35**, 461, 1930; I. Waller, ZS. f. Phys. **62**, 673, 1930.

** Vgl. A. Einstein, Berl. Ber. 1918, S. 154, oder auch W. Pauli, Relativitätstheorie, Berlin 1921, Nr. 60, S. 736.

woraus umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} \gamma' &= \sum_i \gamma'_{ii} = -\gamma, \quad &(4)\\ \gamma_{ik} &= \gamma'_{ik} - \tfrac{1}{2}\delta_{ik}\gamma' \quad &(5)\end{aligned}\right\}$$

folgt, so legen wir das Koordinatensystem fest durch die Forderung*:

$$\frac{\partial \gamma'_{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{6}$$

Das vom elektromagnetischen Feld F_{ik} mit dem Maxwellschen Spannungstensor

$$\left.\begin{aligned} S_{ik} &= F_{ir}F_{kr} - \tfrac{1}{4}\delta_{ik}F,\\ F &= F_{rs}F_{rs}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

erzeugte Gravitationsfeld wird gegeben durch die Gleichung

$$\sum_r \frac{\partial^2 \gamma'_{ik}}{(\partial x^r)^2} = -2\varepsilon S_{ik}. \tag{8}$$

Infolge von $\sum_i S_{ii} = 0$ ist übrigens

$$\sum_i \frac{\partial^2 \gamma'}{(\partial x^i)^2} = 0, \tag{9}$$

so daß wir statt (8) auch

$$\sum_r \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{(\partial x^r)^2} = -2\varepsilon S_{ik} \tag{10}$$

schreiben können.

Dazu kommen die durch die Gravitationsglieder etwas modifizierten Maxwellschen Gleichungen, die wir nicht explizit hinzuschreiben brauchen.

Die entsprechende Lagrangefunktion lautet:

$$L = -\frac{1}{4}F - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i}\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'}{\partial x^i}\frac{\partial \gamma'}{\partial x^i}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\gamma'_{rs}S_{rs}. \tag{11}$$

Daraus folgt für die Hamiltonfunktion, die wir in den Variablen q, q' (und nicht q, p) schreiben:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_L + \mathfrak{H}_G + \mathfrak{W}, \tag{12}$$

wobei $\mathfrak{H}_L$ die gewöhnliche elektromagnetische Energiedichte $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$, $\mathfrak{H}_G$ den reinen Gravitationsanteil

$$\mathfrak{H}_G = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i}\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'}{\partial x^i}\frac{\partial \gamma'}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^4}\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^4} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'}{\partial x^4}\frac{\partial \gamma'}{\partial x^4}\right), \tag{13}$$

* Die übliche Regel vom Weglassen des Summenzeichens wird überall befolgt, wo sie die Deutlichkeit nicht beeinträchtigt.

und $\mathfrak{W}$ den Wechselwirkungsanteil

$$\mathfrak{W} = \frac{\varepsilon}{2}\left(-\gamma'_{rs} S_{rs} + 2\,\gamma'_{4s} S_{4s} + 2\gamma'_{is} F_{4i} F_{4s} + \tfrac{1}{2}\gamma'_{44} F - \gamma' F_{4i} F_{4i}\right) \tag{14}$$

darstellt *.

Bei der Quantelung der γ'_{ik} wollen wir die Nebenbedingung (6) nach der „Fermischen Methode“* berücksichtigen. D. h. wir geben uns diese Bedingung sowie ihre zeitliche Ableitung auf einem Schnitt $t = \text{const}$ vor; dabei ist zu beachten, daß sie nicht als q-Zahlrelationen aufgefaßt werden dürfen. Es ist dann leicht zu sehen, mit Rücksicht auf den Erhaltungssatz $\partial S_{ik}/\partial x^k = 0$, daß sich die betrachteten Nebenbedingungen auf Grund der Feldgleichungen (8) mit der Zeit fortpflanzen.

Das elektromagnetische Feld (nullter Näherung) behandeln wir nach der zweiten Heisenberg-Paulischen Methode*; da wir keine Materie in Betracht ziehen, haben wir es nur mit den transversalen Eigenschwingungen zu tun; wir zerlegen die Feldstärken nach fortschreitenden Wellen; als Randbedingung wählen wir eine zyklische Bedingung mit der Periode L und lassen zum Schluß L gegen unendlich streben **. Wir setzen also

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathfrak{k},\lambda} \sqrt{\frac{k}{L}}\, \mathfrak{e}^{\mathfrak{k}\lambda} \left(A_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{\frac{2\pi i \mathfrak{k}\mathfrak{r}}{L}} - A_{-\mathfrak{k},-\lambda}\, e^{-\frac{2\pi i \mathfrak{k}\mathfrak{r}}{L}}\right), \\ \mathfrak{H} &= \frac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathfrak{k},\lambda} \sqrt{\frac{k}{L}}\, \mathfrak{h}^{\mathfrak{k}\lambda} \left(A_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{\frac{2\pi i \mathfrak{k}\mathfrak{r}}{L}} - A_{-\mathfrak{k},-\lambda}\, e^{-\frac{2\pi i \mathfrak{k}\mathfrak{r}}{L}}\right); \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

dabei ist der Normierungsfaktor $\alpha = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{ch}{2}}$; der Index $\lambda = 1, 2$ bezeichnet die beiden zueinander senkrechten Eigenschwingungen mit dem Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$, vom Betrage $k = |\mathfrak{k}|$; $\mathfrak{e}^{\mathfrak{k}\lambda}$ und $\mathfrak{h}^{\mathfrak{k}\lambda}$ sind zueinander und zu $\mathfrak{k}$ senkrechte Einheitsvektoren, und zwar ist $\mathfrak{h}^{\mathfrak{k}\lambda} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{k}\lambda} \times \mathfrak{k}/k$, ferner $\mathfrak{e}^{-\mathfrak{k},\lambda} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{k},\lambda}$, $\mathfrak{h}^{-\mathfrak{k},\lambda} = -\mathfrak{h}^{\mathfrak{k},\lambda}$; endlich hängen die Amplituden A mit den Anzahl- und Phasenvariablen folgendermaßen zusammen:

$$A_{\mathfrak{k}\lambda} = e^{-\frac{2\pi i}{h}\Theta_{\mathfrak{k}\lambda}}\, N_{\mathfrak{k}\lambda}^{1/2}, \quad A_{-\mathfrak{k},-\lambda} = N_{\mathfrak{k}\lambda}^{1/2}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\Theta_{\mathfrak{k}\lambda}}. \tag{16}$$

Der Übersichtlichkeit halber werden wir oft im folgenden einen Zustand $(\mathfrak{k}_r, \lambda_r)$ durch den Buchstaben r bezeichnen und dementsprechend

---

* Dabei ist Φ_4 gleich Null gewählt; vgl. W. Heisenberg u. W. Pauli, ZS. f. Phys. **59**, 171 ff., 1930.

** L. Landau u. R. Peierls, ZS. f. Phys. **62**, 197, 1930.

$A_{\mathfrak{k}_r \lambda_r} \equiv A_r$, $A_{-\mathfrak{k}_r, -\lambda_r} \equiv B_r$ setzen. Ferner führen wir noch folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} I_{\pm 5}(rs) &= \frac{1}{L^3} e^{\frac{2\pi i}{L}(\mathfrak{k}_r \pm \mathfrak{k}_s)\mathfrak{r}}, \\ I_{\pm 6}(rs) &= \frac{1}{L^3} \frac{e^{\frac{2\pi i}{L}(\mathfrak{k}_r \pm \mathfrak{k}_s)\mathfrak{r}}}{|\mathfrak{k}_r \pm \mathfrak{k}_s|^2 - (k_r \pm k_s)^2} \cdot \frac{L^2}{2\pi^2} \\ &= \pm \frac{L^2}{4\pi^2} \frac{1}{k_r k_s (\cos\Theta_{rs} - 1)} I_{\pm 5}(rs) \\ &\quad \left(\cos\Theta_{rs} = \frac{\mathfrak{k}_r \mathfrak{k}_s}{k_r k_s}\right), \\ I_{\pm i}(rs) &= \frac{\partial I_{\pm 6}(rs)}{\partial x^i} = \frac{2\pi i}{L}(\mathfrak{k}_r \pm \mathfrak{k}_s)_i I_{\pm 6}(rs) \quad (i = 1, 2, 3), \\ I_{\pm 4}(rs) &= -\frac{2\pi}{L}(k_r \pm k_s) I_{\pm 6}(rs), \\ I^*_{\pm 4}(rs) &= +\frac{2\pi}{L}(k_r \pm k_s) I^*_{\pm 6}(rs), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(x^* = komplex konjugiertes von x).

Diese Erklärungen gelten nur, so lange $\mathfrak{k}_r$ nicht parallel $\mathfrak{k}_s$ ist; wie wir sehen werden, scheidet dieser singuläre Fall von selbst im Laufe der folgenden Rechnungen aus. Schließlich definieren wir noch den Tensor $\mathfrak{s}^{rs}_{ik}$ durch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{s}^{rs}_{44} &\equiv \mathfrak{w} = \tfrac{1}{2} \sum (\mathfrak{e}^r_i \mathfrak{e}^s_i + \mathfrak{h}^r_i \mathfrak{h}^s_i), \\ \mathfrak{s}^{rs}_{il} &= \delta_{il}\mathfrak{w} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{e}^r_i \mathfrak{e}^s_l + \mathfrak{h}^r_i \mathfrak{h}^s_l) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{e}^s_i \mathfrak{e}^r_l + \mathfrak{h}^s_i \mathfrak{h}^r_l), \\ \mathfrak{s}^{rs}_{i4} &= \mathfrak{s}^{rs}_{4i} = \frac{i}{2}[(\mathfrak{e}^r \times \mathfrak{h}^s)_l + (\mathfrak{e}^s \times \mathfrak{h}^r)_l] \quad (i, l = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Nach (15) und (7) haben wir mit diesen Bezeichnungen

$$S_{ik} = \alpha^2 \sum_{rs} \sqrt{\frac{k_r k_s}{L^2}} \mathfrak{s}^{rs}_{ik} \{A_r A_s I_{+5}(rs) + B_r B_s I^*_{+5}(rs) - A_r B_s I_{-5}(rs) - B_r A_s I^*_{-5}(rs)\}; \tag{19}$$

wenn wir annehmen, daß nur das durch das Lichtfeld (19) erzeugte Gravitationsfeld vorhanden ist, so wird es mit Rücksicht auf die Phasen der A, B und auf die zyklische Randbedingung gegeben durch folgende Lösung von (10):

$$\gamma_{ik} = \varepsilon\alpha^2 \sum_{rs} \sqrt{\frac{k_r k_s}{L^2}}\, \mathfrak{s}_{ik}^{rs} \{A_r A_s I_{+6}(rs) + B_r B_s I^*_{+6}(rs) - A_r B_s I_{-6}(rs) - B_r A_s I^*_{-6}(rs)\}; \tag{20}$$

diese auch für q-Zahlen gültige Lösung erfüllt die Nebenbedingung (6) wegen des Erhaltungssatzes

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x^k} = 0;$$

ferner sieht man leicht ein, daß

$$\lim_{L \to \infty} I_{-6}(rr) = 0 \tag{21}$$

ist, wenn man bedenkt, daß es das (retardierte) Potential einer Belegung von konstanter, in Limes überall verschwindender Dichte $1/L^3$ darstellt.

2. *Berechnung der Gravitationsenergie.* Da das Gravitationsfeld (20) von der ersten Ordnung in ε ist, so ist die Gravitationsenergie $\int(\mathfrak{H}_G + \mathfrak{W})\, dV$ nach (13) und (14) von der Ordnung ε^2. Die im Sinne der Störungsrechnung richtige Störung (zweiter Ordnung) der Energie $\overline{\mathfrak{H}}_L = \sum_r (N_r + \frac{1}{2}) h\nu_r$ eines durch die Zahlen N_r der Lichtquanten von der Art $r \left(\nu_r = \frac{k_r c}{L}\right)$ charakterisierten Zustandes des Lichtfeldes bekommt man also, indem man in $\mathfrak{H}_G + \mathfrak{W}$ für die γ_{ik} die Ausdrücke (20) einsetzt und das zum betreffenden Zustand zugehörige Diagonalglied berechnet.

Eine Vereinfachung tritt dabei zunächst dadurch ein, daß für das Feld (20) $\gamma = -\gamma' = 0$ und mithin $\gamma'_{ik} = \gamma_{ik}$ ist. Die übrigbleibenden Glieder haben die Form

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\alpha^4 \sum_{rsmn} \sqrt{\frac{k_r k_s k_m k_n}{L^4}}\, \mathfrak{s}_{ik}^{rs} \mathfrak{s}_{ik}^{mn} \int & \{A_r A_s I_{+\tau}(rs) + B_r B_s I^*_{+\tau}(rs) - A_r B_s I_{-\tau}(rs) - B_r A_s I^*_{-\tau}(rs)\} \\ & \cdot \{A_m A_n I_{+\varrho}(mn) + B_m B_n I^*_{+\varrho}(mn) - A_m B_n I_{-\varrho}(mn) - B_m A_n I^*_{-\varrho}(mn)\}\, dV \\ & (\varrho, \tau = 1, 2, \cdots, 6)\end{aligned} \tag{22}$$

oder eine ähnliche, wo $\mathfrak{s}_{ik}^{rs} \mathfrak{s}_{ik}^{mn}$ zu ersetzen ist durch

$$\mathfrak{s}_{i4}^{rs} \mathfrak{s}_{i4}^{mn} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{s}_{ik}^{rs} (\mathfrak{e}_i^m \mathfrak{e}_k^n + \mathfrak{e}_i^n \mathfrak{e}_k^m), \tag{23}$$

bzw.

$$(\mathfrak{h}^r \mathfrak{h}^s + \mathfrak{e}^r \mathfrak{e}^s)(\mathfrak{h}^m \mathfrak{h}^n - \mathfrak{e}^m \mathfrak{e}^n). \tag{23'}$$

Im Integrand von (22) enthalten nur Produkte mit zwei Faktoren A und zwei Faktoren B mit denselben Indizes Diagonalglieder. Wenn man noch (21) berücksichtigt, reduziert sich (22) auf

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\alpha^4\sum_{rs}\frac{k_r k_s}{L^2}\sum_{ik}(\mathfrak{s}^{rs}_{ik})^2\int dV\,\{&2A_rA_sB_rB_sI_{+\tau}(rs)\,I^*_{+\varrho}(rs)\\&+2B_rB_sA_rA_sI^*_{+\tau}(rs)\,I_{+\varrho}(rs)+A_rB_sA_sB_rI_{-\tau}(rs)\,I_{-\varrho}(sr)\\&+A_rB_sB_rA_sI_{-\tau}(rs)\,I^*_{-\varrho}(rs)+B_rA_sA_rB_sI^*_{-\tau}(rs)\,I_{-\varrho}(rs)\\&+B_rA_sB_sA_rI^*_{-\tau}(rs)\,I^*_{-\varrho}(sr)\}.\end{aligned}\tag{24}$$

Um nun die Ausdrücke $\sum_{i,k}(\mathfrak{s}^{rs}_{ik})^2$ und (23) bequem auszuwerten, bemerken wir, daß sie kovariant gegen Drehungen sind. Wählen wir also $\mathfrak{h}^s$, $\mathfrak{e}^s$, $\mathfrak{k}_s$ als Achsenkreuz $0xyz$, so reduziert sich der Tensor $\mathfrak{s}^{rs}_{ik}$ nach (18) zu

$$\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}(\mathfrak{e}_2-\mathfrak{h}_1), & -\frac{1}{2}(\mathfrak{e}_1+\mathfrak{h}_2), & -\frac{1}{2}\mathfrak{h}_3, & \frac{i}{2}\mathfrak{h}_3,\\ -\frac{1}{2}(\mathfrak{e}_1+\mathfrak{h}_2), & -\frac{1}{2}(\mathfrak{e}_2-\mathfrak{h}_1), & -\frac{1}{2}\mathfrak{e}_3, & \frac{i}{2}\mathfrak{e}_3,\\ -\frac{1}{2}\mathfrak{h}_3, & -\frac{1}{2}\mathfrak{e}_3, & \frac{1}{2}(\mathfrak{e}_2+\mathfrak{h}_1), & -\frac{i}{2}(\mathfrak{e}_2+\mathfrak{h}_1),\\ \frac{i}{2}\mathfrak{h}_3, & \frac{i}{2}\mathfrak{e}_3, & -\frac{i}{2}(\mathfrak{e}_2+\mathfrak{h}_1), & -\frac{1}{2}(\mathfrak{e}_2+\mathfrak{h}_1),\end{matrix}\right|$$

woraus folgt, unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen, für

$$\sum_{i,k}(\mathfrak{s}^{rs}_{ik})^2:\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mathfrak{k}_3}{k}\right)^2,$$

$$\sum_i(\mathfrak{s}^{rs}_{i4})^2-\frac{1}{2}\mathfrak{s}^{rs}_{ik}(\mathfrak{e}^r_i\mathfrak{e}^s_k+\mathfrak{e}^s_i\mathfrak{e}^r_k):\ \frac{1}{4}\left(1-\frac{\mathfrak{k}_3}{k}\right)^2,$$

d. h. wenn man zum ursprünglichen Koordinatensystem zurückkehrt,

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i,k}(\mathfrak{s}^{rs}_{ik})^2=\tfrac{1}{2}(1-\cos\Theta_{rs})^2,\\&\sum_i(\mathfrak{s}^{rs}_{i4})^2-\tfrac{1}{2}\mathfrak{s}^{rs}_{ik}(\mathfrak{e}^r_i\mathfrak{e}^s_k+\mathfrak{e}^s_i\mathfrak{e}^r_k)=\tfrac{1}{4}(1-\cos\Theta_{rs})^2.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

Was den Ausdruck (23′) betrifft, wollen wir zunächst festsetzen, daß bei festem Achsenkreuz $\mathfrak{h}^s$, $\mathfrak{e}^s$, $\mathfrak{k}_s$ und festem λ_s, die (bisher willkürliche) Richtung von $\mathfrak{e}^r$ bzw. $\mathfrak{h}^r$ jeweils mit der Schnittlinie der Ebenen ($\mathfrak{e}^s$, $\mathfrak{h}^s$) und ($\mathfrak{e}^r$, $\mathfrak{h}^r$) zusammenfällt, je nachdem $\lambda_r=\lambda_s$ ist oder nicht; dementsprechend setzen wir

$$\mathfrak{e}^r\,\mathfrak{e}^s=\cos\varphi_{rs},\quad \text{wenn } \lambda_r=\lambda_s;$$

dann wird bei gegebenem $\mathfrak{k}_r$

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{h}^r\mathfrak{h}^s)^2 - (\mathfrak{e}^r\mathfrak{e}^s)^2 &= -\cos^2\varphi_{rs}\sin^2\Theta_{rs}, \text{ wenn } \lambda_r = \lambda_s,\\ (\mathfrak{h}^r\mathfrak{h}^s)^2 - (\mathfrak{e}^r\mathfrak{e}^s)^2 &= +\sin^2\varphi_{rs}\sin^2\Theta_{rs}, \text{ wenn } \lambda_r \neq \lambda_s.\end{aligned}\right\} \quad (25')$$

Jetzt sieht man, wie die Singularitäten in den $I_{\pm\varrho}(rs)$ für $\Theta_{rs} = 0$ durch die Faktoren (25), (25′) aufgehoben werden.

Für den von $\mathfrak{H}_G$ herrührenden Anteil der Störungsenergie bekommt man nach (13), (24), (25)

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{H}}_G = \frac{\varepsilon^2\alpha^4}{32\pi^2}\cdot\frac{1}{L^3}\sum_{rs}&[(\cos\Theta_{rs} - 1)\,\{2A_rA_sB_rB_s + 2B_rB_sA_rA_s\\ &-(A_rB_sA_sB_r + A_rB_sB_rA_s + B_rA_sA_rB_s + B_rA_sB_sA_r)\}\\ &+\frac{(k_r + k_s)^2}{k_rk_s}\,\{2A_rA_sB_rB_s + 2B_rB_sA_rA_s\}\\ &+\frac{(k_r - k_s)^2}{k_rk_s}\,(A_rB_sA_sB_r + A_rB_sB_rA_s + B_rA_sA_rB_s + B_rA_sB_sA_r)],\end{aligned}$$

oder, nach gesonderter Behandlung der Glieder mit $r = s$,

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{H}}_G = \frac{\varepsilon^2\alpha^4}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{L^3}\sum_{rs}&[(\cos\Theta_{rs} + 1)\,(A_rB_r - B_rA_r)\,(A_sB_s - B_sA_s)\\ &+\frac{k_r^2 + k_s^2}{k_rk_s}\,(A_rB_r + B_rA_r)\,(A_sB_s + B_sA_s)]\\ -\frac{\varepsilon^2\alpha^4}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{L^3}\sum_r&[(A_rB_r + B_rA_r)^2 + (A_rB_r - B_rA_r)^2 - 2A_r^2B_r^2 - 2B_r^2A_r^2],\end{aligned}$$

oder schließlich gemäß (16)

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{H}}_G = \frac{\varepsilon^2\alpha^4}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{L^3}\sum_{rs}(\cos\Theta_{rs} + 1) + \frac{\varepsilon^2\alpha^4}{4\pi^2}\sum_r\frac{1}{L^3}&\\ +\frac{\varepsilon^2\alpha^4}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{L^3}\sum_{rs}\frac{k_r^2 + k_s^2}{k_rk_s}\,(2N_r + 1)\,(2N_s + 1).&\end{aligned} \quad (26)$$

Durch eine analoge, von (14), (24), (25) und (25′) ausgehende Rechnung findet man, wenn man noch berücksichtigt, daß die Mittelwerte von $\cos^2\varphi_{rs}$ und $\sin^2\varphi_{rs}$ gleich sind, daß der Wechselwirkungsanteil $\overline{\mathfrak{W}}$ gleich Null ist. Mithin bleibt für die gesuchte Störungsenergie der Ausdruck (26).

Hätten wir es mit einem *klassischen* Wellenpaket zu tun, so wären in (26) die $(2N + 1)$ durch $2N$ zu ersetzen und die erste Zeile zu streichen, und wir bekämen für die Gravitationsenergie einen *endlichen* Wert. Quantenmechanisch hingegen finden wir ein wegen des Auftretens von Schwingungen mit beliebig kurzer Wellenlänge unendlich großes Zusatzglied, welches übrigens noch dann bestehen bleibt, wenn man in (19) $A_r B_s$ durch $B_s A_r$ ersetzt, um die Nullpunktsenergie der Strahlung zu beseitigen. Dieses unendliche Glied setzt sich aus zwei Teilen zusammen: einem von den Lichtquantenzahlen unabhängigen und einem *ebenfalls unendlichen*, zu den Lichtquantenzahlen proportionalen Anteil.

Man kann die unendlichen Faktoren von der Gestalt

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^3} \int k^n \, d\mathfrak{k}_1 \, d\mathfrak{k}_2 \, d\mathfrak{k}_3 \quad (n = 1, 2, 3)$$

auf eine andere, lehrreiche Form bringen, die zugleich zeigt, daß der Übergang zum Limes $L = \infty$ unwesentlich ist. Den Normierungsfaktor $1/L^3$ kann man nämlich schreiben, wenn $u(\mathfrak{k}, \mathfrak{r})$ eine normierte Eigenfunktion darstellt,

$$\frac{1}{L^3} = u(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}) \, u^*(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}) = \int u(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}) \, u^*(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}') \, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') \, dV';$$

dann ist

$$\frac{1}{L^3} \int k^n \, d\mathfrak{k}_1 \, d\mathfrak{k}_2 \, d\mathfrak{k}_3 = \int \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') \, dV' \int k^n \, u(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}) \, u^*(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}') \, d\mathfrak{k}_1 \, d\mathfrak{k}_2 \, d\mathfrak{k}_3;$$

wegen

$$\delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') = \int u(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}) \, u^*(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}') \, d\mathfrak{k}_1 \, d\mathfrak{k}_2 \, d\mathfrak{k}_3$$

ist, mit einer Bezeichnung von Landau und Peierls (l. c. S. 189),

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^3} \int k^n \, d\mathfrak{k}_1 \, d\mathfrak{k}_2 \, d\mathfrak{k}_3 &= \int \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') \, dV' \, (-\Delta_{\mathfrak{r}})^{n/2} \, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') \\ &= [(-\Delta_{\mathfrak{r}})^{n/2} \, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')]_{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'}; \end{aligned}$$

man kann also auch sagen, daß die Unendlichkeit darauf beruht, daß man einem Lichtquant keinen endlichen Radius zuschreiben kann. Die Analogie mit dem Fall des Elektrons braucht kaum betont zu werden.

3. *Übergangsprozesse erster Näherung.* Um nun die durch die Wechselwirkung $\mathfrak{W}$ hervorgerufenen Übergänge zu übersehen, wollen wir zunächst neben den Lichtwellen (15) auch reine Gravitationswellen einführen, die wir zur nullten Näherung unseres Wellenfeldes mitrechnen.

Nach Einstein gibt es zweierlei Gravitationswellen im Vakuum. Mit Rücksicht auf die Nebenbedingung (6) lassen sie sich durch die Komponenten $\gamma_{11} - \gamma_{22}$ bzw. γ_{12} beschreiben, wenn der Ausbreitungsvektor als z-Achse gewählt ist. Wir können dann noch $\gamma_{11} = -\gamma_{22}$ setzen, um die Vereinfachung $\gamma = 0$ zu erreichen. Für ein beliebiges Paket solcher Wellen haben wir dann

$$\gamma = 0 \text{ und } \gamma_{i4} = 0; \tag{27}$$

die übrigen $\gamma_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) lauten, wenn $\{D^{(r)}_{\alpha\beta}\}$ diejenige Drehung darstellt, welche den Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}_r$ in die z-Richtung überführt,

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{hc}{L^3}}\sum_{\mathfrak{k}_r}\sqrt{\frac{L}{k_r}}\Big\{\frac{1}{2}(D^{(r)}_{\mu 1}D^{(r)}_{\nu 1} - D^{(r)}_{\mu 2}D^{(r)}_{\nu 2})\Big(F_{\mathfrak{k}_r}\, e^{\frac{2\pi i\, \mathfrak{k}_r \mathfrak{r}}{L}} + F^{\dagger}_{-\mathfrak{k}_r} e^{-\frac{2\pi i\, \mathfrak{k}_r \mathfrak{r}}{L}}\Big)\\ + \tfrac{1}{2}(D^{(r)}_{\mu 1}D^{(r)}_{\nu 2} + D^{(r)}_{\mu 2}D^{(r)}_{\nu 1})\Big(G_{\mathfrak{k}_r}\, e^{\frac{2\pi i\, \mathfrak{k}_r \mathfrak{r}}{L}} + G^{\dagger}_{-\mathfrak{k}_r}\, e^{-\frac{2\pi i\, \mathfrak{k}_r \mathfrak{r}}{L}}\Big)\Big\};\end{aligned} \tag{28}$$

dabei ist, wenn $M_{\mathfrak{k}_r,1}$, $M_{\mathfrak{k}_r,2}$ die Anzahlen von Gravitationsquanten der ersten bzw. zweiten Art in der Richtung $\mathfrak{k}_r$ bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathfrak{k}_r} &= e^{-\frac{2\pi i}{h}\theta_{\mathfrak{k}_r,1}}\, M^{1/2}_{\mathfrak{k}_r,1}, \qquad & F^{\dagger}_{-\mathfrak{k}_r} &= M^{1/2}_{\mathfrak{k}_r,1}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\theta_{\mathfrak{k}_r,1}},\\ G_{\mathfrak{k}_r} &= e^{-\frac{2\pi i}{h}\theta_{\mathfrak{k}_r,2}}\, M^{1/2}_{\mathfrak{k}_r,2}, \qquad & G^{\dagger}_{-\mathfrak{k}_r} &= M^{1/2}_{\mathfrak{k}_r,2}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\theta_{\mathfrak{k}_r,2}}.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die Energie dieser Gravitationswellen ist nach (13)

$$\overline{\mathfrak{H}}_G = \sum_{\mathfrak{k}_r}\{(M_{\mathfrak{k}_r,1} + \tfrac{1}{2}) + (M_{\mathfrak{k}_r,2} + \tfrac{1}{2})\}\, h\,\nu_r. \tag{30}$$

Gemäß (14), welches sich hier wegen (27) auf

$$\mathfrak{W} = \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(F_{4\mu}F_{4\nu} - \tfrac{1}{2}S_{\mu\nu}) \tag{31}$$

reduziert, kommen in erster Näherung (d. h. mit einer ε^2 proportionalen Wahrscheinlichkeit) nur solche Übergänge vor, an denen ein Gravitationsquant und zwei Lichtquanten teilnehmen. Berücksichtigen wir (auf Grund wohlbekannter Überlegungen) nur diejenigen Prozesse, die unter Erhaltung der Gesamtenergie stattfinden, so muß gelten, da auch der Gesamtimpuls erhalten bleibt,

$$\left.\begin{aligned} k_r &= k_s + k_t,\\ \mathfrak{k}_r &= \mathfrak{k}_s + \mathfrak{k}_t,\end{aligned}\right|$$

woraus folgt, daß die drei am Prozeß beteiligten Quanten dieselbe Richtung haben müssen.

Bezeichnen wir mit t den Zustand des Gravitationsquants, mit r und s diejenigen der Lichtquanten, so sind nach (31) die Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit von der Gestalt

$$\varepsilon^2 c^2 h\,\frac{k_r k_s}{k_t}\cdot\frac{1}{L^3}\, w_{rst}\, f(N_r, N_s, M_t); \tag{32}$$

dabei ist $f(N_r, N_s, M_t)$ das übliche Produkt von Faktoren N_r, N_s, M_t; $N_r + 1$, $N_s + 1$, $M_t + 1$; $N_r + 2$, $N_s + 2$, je nach dem Prozeß; wenn ferner Θ_{rt} der Winkel zwischen der Polarisationsrichtung $\mathfrak{e}^r$ des Lichtquants r und der ausgezeichneten y-Richtung in der Wellenebene des Gravitationsquants bedeutet, so ist

$$w_{rst} = \tfrac{1}{4} \cos^2 2\Theta_{rt},$$

wenn entweder das Gravitationsquant von der ersten Art und die beiden Lichtquanten gleich polarisiert ($\lambda_r = \lambda_s$) sind, oder das Gravitationsquant von der zweiten Art und die beiden Lichtquanten verschieden polarisiert ($\lambda_r \neq \lambda_s$) sind,

$$w_{rst} = \tfrac{1}{4} \sin^2 2\Theta_{rt},$$

in den beiden anderen möglichen Fällen.

Die Übergangsprozesse selber lassen sich folgendermaßen beschreiben:

1. Verschwinden eines Gravitationsquants und Entstehen zweier (verschiedener oder gleicher) Lichtquanten;

2. Verschwinden zweier Lichtquanten und Entstehen eines Gravitationsquants;

3. Verschwinden eines Lichtquants und Entstehen eines anderen Lichtquants und eines Gravitationsquants (Frequenzverkleinerung eines Lichtquants!);

4. Verschwinden eines Lichtquants und eines Gravitationsquants und Entstehen eines anderen Lichtquants (Frequenzvergrößerung eines Lichtquants!).

Denken wir uns also einen anfangs nur von Strahlung gefüllten Hohlraum (ohne Kohlestäubchen!), so genügen schon die Gravitationswirkungen erster Näherung zwischen den Lichtquanten, um das Plancksche Gleichgewicht (mit einer zu $1/\varkappa$ proportionalen Geschwindigkeit) herzustellen.

Herrn Prof. Pauli bin ich für viele kritische Bemerkungen und Ratschläge herzlich dankbar.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidgenössischen Technischen Hochschule, 14. August 1930.

Nachtrag bei der Korrektur.

Statt wie im § 2 als Ausgangszustand Lichtquanten mit genau bekanntem Impuls zu nehmen, kann man auch die Berechnung des Mittelwertes von $\overline{\mathfrak{H}_G + \mathfrak{W}}$ für das allgemeinste Wellenpaket durchführen.

Die Anfangsverteilung des Zustandes r sei charakterisiert durch eine (komplexe) Eigenfunktion $\varphi_r(N_r)$ mit der Bedingung:

$$\sum_{N_r=0}^{\infty} |\varphi_r(N_r)|^2 = 1;$$

der Ausgangspunkt ist dann definiert durch die Angabe willkürlicher $\varphi_r(N_r)$ für alle r, mit der einzigen Einschränkung, daß die Gesamtzahl N der Lichtquanten eine gegebene Konstante ist:

$$\sum_r \sum_{N_r} N_r |\varphi_r(N_r)|^2 = N;$$

$$\varphi_r(N_r) = 0 \quad \text{für} \quad N_r > N.$$

Wir haben dann zu berechnen:

$$\text{Mittelwert von } \overline{(\mathfrak{H}_G + \mathfrak{W})}$$
$$= \sum_{N_0 N_1 \dots} \varphi_0^*(N_0)\, \varphi_1^*(N_1) \dots \overline{(\mathfrak{H}_G + \mathfrak{W})}\, \varphi_0(N_0)\, \varphi_1(N_1) \dots$$

Für $N = 0$ (kein Lichtquant) bekommen wir natürlich dasselbe Resultat wie im § 2. Betrachten wir nun den Fall *eines* Lichtquants, d. h.

$$\varphi_r(N_r) = 0 \quad \text{für} \quad N_r > 1$$
$$|\varphi_r(N_r = 0)|^2 + |\varphi_r(N_r = 1)|^2 = 1,$$
$$\sum_r |\varphi_r(N_r = 1)|^2 = 1.$$

Zunächst kommen in Betracht die Diagonalglieder (26): der Beitrag dieser Glieder ist wiederum unendlich, wie im § 2. Ferner können, wie man leicht überlegt, die anderen Glieder nur endliche Beiträge liefern.