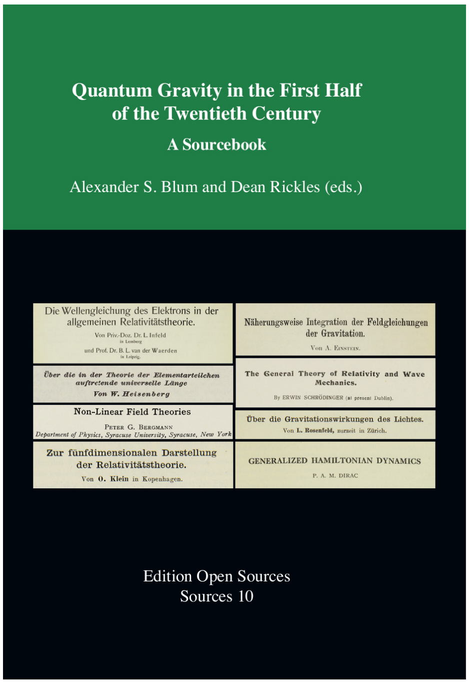
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Leopold Infeld and Bartel van der Waerden (1933): Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie

DOI: 10.34663/9783945561317-16



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open Sources

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 14
Leopold Infeld and Bartel van der Waerden (1933): Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie

Leopold Infeld and Bartel van der Waerden (1933). Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse*, 380–401 (errata on p. 474).

Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von Priv.-Doz. Dr. L. Infeld
in Lemberg

und Prof. Dr. B. L. van der Waerden
in Leipzig.

(Vorgelegt von Hrn. Schrödinger am 12. Januar 1933 [s. oben S. 2].)

§ 1. Einleitung.

Man hat früher gemeint, daß der Einbau der Diracschen Theorie des Elektrons in die allgemeine Relativitätstheorie nur auf Grund eines Fernparallelismus möglich wäre[1]. Diese Meinung hat V. Fock[2] widerlegt, indem er in bezug auf ein beliebiges metrisches Feld in jedem Punkt willkürlich ein orthogonales n-Bein einführt und die Unabhängigkeit der aufgestellten Gleichungen von der Wahl des n-Beins dartut. Die etwas ungeläufige n-Beinrechnung sucht Schrödinger[3] zu vermeiden, indem er die Diracschen vierreihigen Matrices nach dem Beispiel von Tetrode verallgemeinert und von Punkt zu Punkt variabel macht. Jedoch scheint uns der Schrödingersche Rechenapparat unnötig kompliziert, was sich auch darin äußert, daß bei Schrödinger die Transformationsweise der betrachteten Größen nicht einmal explizit angegeben wird, sondern man sich mit der Angabe der infinitesimalen Transformationen begnügen muß.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Rechenapparat entwickelt, der unter Vermeidung der erwähnten Mängel dasselbe leistet wie die Theorien von Fock und Schrödinger. Statt vierreihiger werden nur zweireihige Matrices eingeführt, zu deren Darstellung die gewöhnlichen Regeln der Tensorrechnung ausreichen. Neben den Weltvektoren treten zweikomponentige »Spinvektoren« auf, welche (in Gegensatz zur früheren »speziellen« Spinoranalyse[4]) unabhängig von den Weltvektoren transformiert werden, wodurch die formalen Regeln zur Bildung invarianter Gleichungen bekanntlich sehr einfach werden. Als Bindeglied zwischen Weltvektoren und Spinoren dienen gewisse gemischte Größen $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ (verallgemeinerte Paulische Matrices), welche

---

[1] Vgl. etwa E. Wigner, Z. f. Phys. 53, 592, 1929.
[2] V. Fock, Z. f. Phys. 57, 261, 1929. Vgl. auch H. Weyl, Z. f. Phys. 56, 330, 1929.
[3] E. Schrödinger, S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1932, 105.
[4] Siehe B. L. van der Waerden, Göttinger Nachrichten 1929, 100.

die Rolle der Fockschen n-Beinkomponenten übernehmen und ebenso wie diese das metrische Feld g_{kl} mitbestimmen. Nach Einführung einer kovarianten Differentiation für Spinoren lassen sich die Diracschen Gleichungen unmittelbar hinschreiben. In dem Ausdruck für die kovariante Differentiation tritt ein willkürlicher Weltvektor Φ_k auf, der mit dem elektromagnetischen Potential identifiziert wird. Das elektromagnetische Feld wird dadurch ähnlich wie in den bekannten einheitlichen Feldtheorien von Gravitation und Elektrizität geometrisiert.

Unsere Arbeit weist viele Berührungspunkte mit einer Arbeit von J. A. Schouten[1] auf. Schouten kommt am Ende nahezu zum gleichen Formalismus, der in dieser Arbeit entwickelt wird; nur benutzt er zur Einführung dieses Formalismus unnötigerweise n-Beinkomponenten und Sätze über Sedenionen, während der Formalismus nachher noch durch Hilfsvariablen und Pseudogrößen belastet wird. Die Einführung von »Spinordichten« haben wir von Schouten übernommen.

Es kommen in der vorliegenden Arbeit zwei Formalismen nebeneinander zur Darstellung: der einfachere »γ-Formalismus«, in welchem ein alternierender Spinor $\gamma_{\lambda\mu}$ zugrunde gelegt wird, und der etwas kompliziertere »ε-Formalismus«, welcher in Anlehnung an Schouten Spinordichten benutzt. In beiden Formalismen gilt das Prinzip der Eichinvarianz der Potentiale. Daß die Einführung von »Pseudogrößen« zum Zwecke der Eichinvarianz hier entbehrlich wird, liegt daran, daß wir (in Gegensatz zu Schouten) im Spinraum auch Transformationen mit komplexer Determinante zulassen: diese ersetzen die Weyl-Schoutenschen Umeichungen. Die Kenntnis der in der Einleitung zitierten Arbeiten ist für die Lektüre des Folgenden nicht erforderlich.

§ 2. Der metrische Raum und der Spinraum.

Wir legen zunächst die gewohnten Begriffe der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde: vierdimensionaler Riemannscher Raum, metrischer Tensor mit den Komponenten g_{kl} (g_{11} bis $g_{33} < 0$, $g_{44} > 0$), kovariante und kontravariante Weltvektoren und Welttensoren.

Jedem Punkt des metrischen Raumes mit den reellen Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 soll nun weiter ein komplexer zweidimensionaler Spinraum zugeordnet werden, dessen Vektoren und Tensoren mit dem Sammelnamen Spinoren bezeichnet werden. Wir verabreden: Die Indices der Welttensoren werden mit lateinischen, diejenigen der Spinoren mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Bei zweimal auftretenden Indices ist stets zu summieren, und zwar bei den lateinischen von 1 bis 4, bei griechischen von 1 bis 2.

---

[1] J. A. Schouten, Journal of Math. and Phys. 10, 239, 1931.

Es seien $\alpha^{\lambda} (\lambda = 1, 2)$ die Komponenten eines kontravarianten Spinvektors. Sie transformieren sich bei Koordinatentransformationen im Spinraume in folgender Weise:

$$\alpha'^{\lambda} = \Lambda^{\lambda}_{\rho}\, \alpha^{\rho}. \tag{1a}$$

Sowohl α^{λ} als auch Λ^{λ}_{ρ} sind im allgemeinen komplexe Funktionen der als Parameter auftretenden Weltpunkte. Die einzige Bedingung (außer der Differenzierbarkeit), denen die Transformationskoeffizienten Λ^{λ}_{ρ} zu genügen haben, ist die folgende: Die Determinante $|\Lambda^{\lambda}_{\rho}|$ soll überall von Null verschieden sein:

$$\Delta = \mathrm{Det}\,|\Lambda^{\lambda}_{\rho}| \neq 0. \tag{2}$$

Die Transformationen des vierdimensionalen metrischen Raumes und des Spinraumes sind als voneinander völlig unabhängig zu betrachten.

Der zu α^{λ} konjugiert komplexe Spinvektor soll durch $\alpha^{\dot\lambda}$ bezeichnet werden. Seine Transformationsgleichungen sind:

$$\alpha'^{\dot\lambda} = \overline{\Lambda^{\lambda}_{\rho}}\, \alpha^{\dot\rho}. \tag{1b}$$

Die Spinoren

$$\beta^{\dot\lambda\mu}, \quad \beta^{\lambda\dot\mu}, \quad \beta^{\dot\lambda\mu\nu} \quad \text{usw.}$$

transformieren sich entsprechend wie

$$\alpha^{\dot\lambda}\alpha^{\mu}, \quad \alpha^{\lambda}\alpha^{\dot\mu}, \quad \alpha^{\dot\lambda}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} \quad \text{usw.}$$

Die Spinoren $\beta^{\dot\lambda\mu\dot\nu}$ und $\beta^{\lambda\dot\mu\nu}$ sind zueinander konjugiert komplex, da alle nicht punktierten Indices durch punktierte ersetzt wurden und umgekehrt. Es ist also:

$$\beta^{\dot\lambda\mu\dot\nu} = \overline{\beta^{\lambda\dot\mu\nu}}. \tag{3}$$

Es war bis jetzt in der Spinoranalyse üblich, sich auf Transformationen mit konstanten Koeffizienten und von der Determinante Eins im Spinraum zu beschränken. Dabei haben zwei Spinvektoren α^{λ}, β^{λ} die absolute Invariante

$$\varepsilon_{\lambda\mu}\alpha^{\lambda}\beta^{\mu} = \alpha^{1}\beta^{2} - \alpha^{2}\beta^{1}$$
$$(\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1; \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0). \tag{4}$$

Wenn man beliebige lineare Transfomationen zuläßt, ist dieser Ausdruck nicht mehr absolut invariant. Da man aber die Bildung $\varepsilon_{\lambda\mu}\alpha^{\mu}$, die das Herauf- und Herunterziehen der Indices gestattet, in der Spinorenrechnung nicht gut entbehren kann, so wird eine schiefsymmetrische Größe $\gamma_{\lambda\mu} = -\gamma_{\mu\lambda}$ eingeführt, welche die Funktion der $\varepsilon_{\lambda\mu}$ übernimmt und im Spinraum eine ähnliche Rolle spielt wie der metrische Fundamentaltensor g_{ik} im x-Raum[1].

[1] Vgl. L. Infeld, Phys. ZS. 33, 475, 1932.

Wegen $\gamma_{\lambda\mu} = -\gamma_{\mu\lambda}$ ist $\gamma_{12} = -\gamma_{21}$ die einzige von Null verschiedene Komponente von $\gamma_{\lambda\mu}$; diese kann aber eine ganz beliebige von Null verschiedene Funktion des Weltpunktes sein. Die konjugiert-komplexe Größe sei $\gamma_{\dot\lambda\dot\mu}$. In allen physikalisch wichtigen Formeln tritt nur das Produkt $\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\dot\rho\dot\sigma}$ auf. Dieses Produkt definiert eine invariante Volummessung im Spinraum[1].

Die inverse Matrix zur Matrix $\gamma_{\lambda\mu}$ ist $\gamma^{\lambda\mu}$, wo

$$\gamma^{12} = -\gamma^{21} = \frac{1}{\gamma_{12}}, \quad \gamma^{11} = \gamma^{22} = 0 \tag{5}$$

ist. Den Spinor $\gamma_{\lambda\mu}$ charakterisiert eine komplexe Zahlengröße. Es sei daher:

$$\gamma_{12}\gamma_{\dot1\dot2} = \gamma, \qquad \gamma_{12} = \sqrt{\gamma}\, e^{i\vartheta}, \qquad \gamma_{\dot1\dot2} = \sqrt{\gamma}\, e^{-i\vartheta}.$$

Mit Hilfe der Größen $\gamma^{\lambda\mu}$ und $\gamma_{\lambda\mu}$ kann man nun den Übergang von den kovarianten zu den kontravarianten Komponenten eines Vektors oder Tensors definieren:

$$\left.\begin{aligned} a_\mu &= a^\rho\gamma_{\rho\mu}, & a^\mu &= \gamma^{\mu\rho}a_\rho \\ a_{\dot\mu} &= a^{\dot\rho}\gamma_{\dot\rho\dot\mu}, & a^{\dot\mu} &= \gamma^{\dot\mu\dot\rho}a_{\dot\rho} \\ a_{\dot\lambda\mu} &= a^{\dot\rho\sigma}\gamma_{\dot\rho\dot\lambda}\gamma_{\sigma\mu}, \text{ usw.} & & \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Das skalare Produkt

$$-a_\rho\beta^\rho = a^\rho\beta_\rho = \gamma^{\rho\sigma}a_\sigma\beta_\rho = \gamma_{\rho\sigma}a^\sigma\beta^\rho$$

ist invariant; speziell ist

$$a_\lambda a^\lambda = 0.$$

Die Annahme der Größe $\gamma_{\lambda\mu}$ ist zwar der formal einfachste Weg, das Herunterziehen der Indices zu ermöglichen, aber nicht der einzig mögliche. Eine zweite Möglichkeit bietet der Begriff der Spinordichte, den wir jetzt erklären wollen.

Eine (skalare) Spindichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ ist eine solche Zahlengröße, welche sich bei Raumtransformationen wie ein Skalar transformiert, aber bei Spintransformationen von der Determinante Δ mit $\Delta^{-\mathfrak{k}}$ multipliziert wird, wobei $\mathfrak{k}$ eine ganze Zahl ist. Eine Spinordichte (Spinvektordichte, Spintensordichte) vom Gewicht $\mathfrak{k}$ ist eine Größe, die sich transformiert wie ein Produkt aus einem Spinor (Spinvektor, Spintensor) und einer Spindichte. Z. B. ist die in (4) eingeführte Größe $\varepsilon_{\lambda\mu}$ eine Spinordichte vom Gewicht -1.

Benutzt man nun den Begriff der Spinordichte, so kann man auch $\varepsilon_{\lambda\mu}$ statt $\gamma_{\lambda\mu}$ zum Hinunterziehen der Indices benutzen; nur ist dann

$$a_\mu = a^\rho\varepsilon_{\rho\mu}$$

kein Vektor, sondern eine Vektordichte vom Gewicht -1, wenn a^ρ ein Spinvektor ist. Ebenso ist natürlich die inverse Größe $\varepsilon^{\lambda\mu}$ eine Spinordichte vom Gewicht $+1$.

Diejenigen Größen, die bei Spintransformationen den Faktor $\bar\Delta^{-\mathfrak{k}}$ annehmen, werden wir als Spindichten vom Gewicht $\dot{\mathfrak{k}}$ ansprechen. So ist die zu $\varepsilon_{\lambda\mu}$ konjugiert-komplexe Größe $\varepsilon_{\dot\lambda\dot\mu}$ (die übrigens in jedem Koordinatensystem dieselben Komponenten ± 1 und 0 hat, wie $\varepsilon_{\lambda\mu}$ und $\varepsilon^{\lambda\mu}$) eine Spinordichte vom Gewicht $-\dot{1}$. Schließlich brauchen wir noch solche Größen, welche bei Spin-

[1] Das Volumelement ist nämlich durch $\gamma_{12}\gamma_{\dot1\dot2}\dfrac{\partial(\mu^1, \mu^2, \mu^{\dot1}\mu^{\dot2})}{\partial(q, r, s, t)}\, dq\, dr\, ds\, dt$ gegeben, wo q, r, s, t reelle Parameter sind, von denen die komplexen Spinvariablen μ^1, μ^2 irgendwie abhängen.

transformationen den Faktor $|\Delta|^{-\mathfrak{k}}$ annehmen (hier kann $\mathfrak{k}$ auch gebrochen sein); diese nennen wir Spindichten (bzw. Spinordichten) vom Absolutgewicht $\mathfrak{k}$. So ist $\varepsilon_{\lambda\mu}\,\varepsilon_{\dot\rho\dot\sigma}$ eine Spinordichte vom Absolutgewicht -2 und $\varepsilon^{\lambda\mu}\,\varepsilon^{\dot\rho\dot\sigma}$ eine vom Absolutgewicht $+2$.

Wie man sieht, ist die Einführung der Dichten eine formale Belastung; sie hat aber den Vorteil, daß die Einführung des Spinors $\gamma^{\lambda\mu}$, dessen physikalische Realität (vgl. später in § 4) nicht feststeht, vermieden wird. Wir werden im folgenden die beiden besprochenen Möglichkeiten als γ-Formalismus und ε-Formalismus unterscheiden. Welche von diesen Formalismen den Vorzug verdient, das können wir der weiteren Entwicklung der Theorie überlassen.

Es sei noch bemerkt, daß jede algebraische Beziehung zwischen Spinoren, die im γ-Formalismus formuliert wurde, in den ε-Formalismus übertragen werden kann. Dividiert man und multipliziert zugleich z. B. $\gamma_{\lambda\mu}$ durch $\gamma_{12} = e^{i\vartheta}\sqrt{\gamma}$, dann kann man $\frac{\gamma_{\mu\lambda}}{\sqrt{\gamma}}\,e^{-i\vartheta}$ durch $\varepsilon_{\lambda\mu}$ und die Spinoren durch entsprechende Spinordichten ersetzen.

Bei den Raumtransformationen transformieren sich nur die Welttensoren, bei den Transformationen des Spinraumes nur die Spinoren. Es können aber außer den Weltvektoren und Spintensoren noch gemischte Größen eingeführt werden. Eine gemischte Größe von der Art

$$\sigma^{k}_{\dot\lambda\mu}$$

verhält sich bei den Raumtransformationen wie ein kontravarianter Weltvektor, bei den Transformationen des Spinraumes wie ein Spintensor. Ganz allgemein werden die gemischten Größen in den lateinischen Indices wie Welttensoren, in den griechischen Indices wie Spinoren transformiert.

§ 3. Weltvektoren und Spintensoren.

Die Möglichkeit, die Spinoren überhaupt zu räumlichen Größen in Beziehung zu setzen, beruht bekanntlich[1] darauf, daß man jedem Hermitesch symmetrischen Spintensor

$$a_{\dot\lambda\mu} = a_{\dot\mu\lambda} \tag{7}$$

(mit zwei reellen Komponenten $a_{\dot 1 1}$, $a_{\dot 2 2}$ und zwei konjugiert-komplexen $a_{\dot 1 2}$ und $a_{\dot 2 1}$) eineindeutig einen reellen Weltvektor a^k zuordnen kann, dessen 4 Komponenten lineare Funktionen der $a_{\dot\lambda\mu}$ sind:

$$a^k = \sigma^{k\dot\lambda\mu}\,a_{\dot\lambda\mu}\,. \tag{8}$$

Und zwar wird diese Zuordnung so eingerichtet, daß den linearen Transformationen der $a_{\dot\lambda\mu}$, welche diese bei einer Koordinatentransformation mit konstanten Koeffizienten und von der Determinante Eins im Spinraum erleiden, die Lorentztransformationen der zugeordneten Vektoren a^k entsprechen.

Im Fall der speziellen Relativitätstheorie, wo die (die Lorentzgruppe bestimmenden) g_{kl} numerische Konstanten sind, konnte man für die $\sigma^{k\dot\lambda\mu}$ auch

[1] Vgl. B. L. van der Waerden, Spinoranalyse, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1929, S. 100, oder Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin 1932, S. 82, § 20.

numerische Konstanten wählen. Im Fall der allgemeinen Relativitätstheorie geht das natürlich nicht mehr, sondern es werden die $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ als beliebige Ortsfunktionen angenommen, welche nur der Bedingung genügen müssen, eine eineindeutige Beziehung zwischen den reellen Vektoren a^k und den symmetrischen Tensoren $a_{\dot{\lambda}\mu}$ zu vermitteln.

Damit in (8) die a^k stets reell ausfallen, muß man die gemischte Größe $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ auch Hermitesch symmetrisch wählen:

$$\sigma^{k\dot{\lambda}\mu} = \sigma^{k\dot{\mu}\lambda}. \tag{9}$$

Die Tatsache, daß die linearen Transformationen des Spinraumes für die a^k stets Lorentztransformationen, d. h. lineare Transformationen mit einer invarianten quadratischen Form der Signatur $- - - +$ induzieren, liegt daran, daß die Hermiteschen Matrices $a_{\dot{\lambda}\mu}$ eine Invariante derselben Signatur besitzen, nämlich ihre Determinante[1]

$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

an deren Stelle wir auch den bis auf einen reellen Zahlenfaktor damit übereinstimmenden Ausdruck

$$a_{\dot{\lambda}\mu}\,a^{\dot{\lambda}\mu} = \gamma^{\dot{\lambda}\dot{\rho}}\,\gamma^{\mu\sigma}\,a_{\dot{\lambda}\mu}\,a_{\dot{\rho}\sigma} \tag{10}$$

betrachten können. Die Zuordnung $a_{\dot{\lambda}\mu} \to a^k$ verwandelt diese quadratische Form in eine quadratische Form in den a^k, von der wir verlangen, daß sie mit der metrischen Fundamentalform $g_{kl}\,a^k\,a^l$ übereinstimmt. Wir verlangen also

$$g_{kl}\,a^k\,a^l = g_{kl}\,\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\,\sigma^{l\dot{\rho}\sigma}\,a_{\dot{\lambda}\mu}\,a_{\dot{\rho}\sigma} = \gamma^{\dot{\lambda}\dot{\rho}}\,\gamma^{\mu\sigma}\,a_{\dot{\lambda}\mu}\,a_{\dot{\rho}\sigma}$$

identisch in $a_{\dot{\lambda}\mu}$; das heißt aber

$$g_{kl}\,\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\,\sigma^{l\dot{\rho}\sigma} = \gamma^{\dot{\lambda}\dot{\rho}}\,\gamma^{\mu\sigma}. \tag{11}$$

Beachtet man die Regeln für das Hinauf- und Herunterziehen der Indices, so kann man für (11) auch schreiben:

$$\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\,\sigma_{k\dot{\sigma}\rho} = \delta^{\dot{\lambda}}_{\dot{\sigma}}\,\delta^{\mu}_{\rho}$$

$$\left(\delta^{\dot{\lambda}}_{\dot{\sigma}} = \delta^{\mu}_{\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für } \dot{\lambda} = \dot{\sigma} \text{ und } \mu = \sigma \\ 0 & \text{»} \quad \dot{\lambda} \neq \dot{\sigma} \quad \text{»} \quad \mu \neq \sigma \end{cases}\right). \tag{12}$$

Auf Grund von (12) kann man (8) nach $a^{\dot{\lambda}\mu}$ auflösen:

$$a_{\dot{\lambda}\mu} = \sigma_{k\dot{\lambda}\mu}\,a^k.$$

---

[1] Um die Signatur dieser Form zu bestimmen, setze man $a_{11} = a + b$, $a_{22} = a - b$, $a_{12} = c + id$, $a_{21} = c - id$; dann wird $\Delta = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$.

Setzt man diese Auflösung in (8) ein und vergleicht die Koeffizienten von a^k auf beiden Seiten, so folgt

$$\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\sigma_{l\dot{\lambda}\mu} = \delta^k_l. \tag{13}$$

Aus (13) folgt, wenn man auf beiden Seiten den Index l hochzieht:

$$g^{kl} = \sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\sigma^l_{\dot{\lambda}\mu}. \tag{14}$$

Auf Grund der Formeln (12), (13) kann man nicht nur den Weltvektoren, sondern überhaupt allen Welttensoren umkehrbar eindeutig Spingrößen zuordnen, z. B. für einen Tensor p^{kl}:

$$\pi_{\dot{\lambda}\mu,\dot{\rho}\sigma} = \sigma_{k\dot{\lambda}\mu}\sigma_{l\dot{\rho}\sigma}p^{kl}; \quad p^{kl} = \sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\sigma^{l\dot{\rho}\sigma}\pi_{\dot{\lambda}\mu,\dot{\rho}\sigma}.$$

Die Formel (14) zeigt noch einmal explizit, daß die Größen $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ und $\gamma_{\lambda\mu}$ zusammen das metrische Feld bestimmen. Das Umgekehrte gilt natürlich nicht.

Bei der oben besprochenen Zuordnung $\sigma_{\dot{\lambda}\mu} \to a^k$ entsprechen den zeitartigen Vektoren ($g_{kl}a^k a^l > 0$) solche Matrices $a_{\dot{\lambda}\mu}$, welche zu definiten Hermiteschen Formen gehören. Wir wollen die $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ immer so wählen, daß den in die Zukunft gerichteten Vektoren ($a^4 > 0$) die positiv-definiten Formen entsprechen. Weiter können wir die $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ stets so normieren, daß die rein-imaginäre 4reihige Determinante der Vektoren

$$\sigma^{k\dot{1}1}, \quad \sigma^{k\dot{1}2}, \quad \sigma^{k\dot{2}1}, \quad \sigma^{k\dot{2}2}$$

positiv-imaginär ausfällt. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so multiplizieren wir die $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ mit -1 oder gehen zu den konjugiert-komplexen Werten über. Durch diese Normierungen wird erreicht, daß die $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ bis auf eine willkürliche Spintransformation durch das metrische Feld eindeutig bestimmt sind (vgl. § 5).

Der Ausdruck $\gamma_{\dot{\lambda}\dot{\rho}}(\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\sigma^{l\dot{\rho}\nu} + \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\sigma^{k\dot{\rho}\nu})$ ist offenbar antisymmetrisch in den Indices μ und ν, also gleich einem Vielfachen von $\gamma^{\mu\nu}$, etwa $h^{kl}\gamma^{\mu\nu}$. Multipliziert man noch mit $\gamma_{\nu\sigma}$ und beachtet die Regeln für das Herunterziehen von Indices, so folgt

$$\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\sigma^l_{\dot{\lambda}\sigma} + \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\sigma^k_{\dot{\lambda}\sigma} = h^{lk}\delta^\mu_\sigma.$$

Um h^{lk} zu bestimmen, setzen wir $\mu = \sigma$, summieren über μ und vergleichen mit (14). Man findet $h^{lk} = g^{lk}$. Damit ist die erste der beiden folgenden Formeln bewiesen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\sigma^k_{\dot{\lambda}\sigma} + \sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\sigma^l_{\dot{\lambda}\sigma} &= g^{kl}\delta^\mu_\sigma \\ \sigma^{l\dot{\rho}\mu}\sigma^k_{\dot{\lambda}\mu} + \sigma^{k\dot{\rho}\mu}\sigma^l_{\dot{\lambda}\mu} &= g^{kl}\delta^{\dot{\rho}}_{\dot{\lambda}} \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Die zweite folgt ganz analog.

Im ε-Formalismus muß man in (10) und (11) rechts $\gamma^{\dot{\lambda}\dot{\rho}}\gamma^{\mu\sigma}$ durch $\varepsilon^{\dot{\lambda}\dot{\rho}}\varepsilon^{\mu\sigma}$ ersetzen. Damit das Produkt $\varepsilon^{\dot{\lambda}\dot{\rho}}\varepsilon^{\mu\sigma}$ in (11) das richtige Gewicht erhält, muß man für $\sigma^{k\dot{\lambda}\rho}$ eine gemischte Dichte vom Absolutgewicht + 1 wählen. Es wird dann natürlich $\sigma_{k\dot{\lambda}\rho}$ eine gemischte Dichte vom Absolutgewicht − 1. Im ε-Formalismus wird nur der Spinordichte $a_{\dot{\lambda}\mu}$ vom Absolutgewichte − 1, oder der Spinordichte $a^{\dot{\lambda}\mu}$ vom Absolutgewichte + 1 in eineindeutiger Weise ein wirklicher Weltvektor zugeordnet, da nur dann $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}a_{\dot{\lambda}\mu}$ und $\sigma^{k}{}_{\dot{\lambda}\mu}a^{\dot{\lambda}\mu}$ bei einer Transformation im Spinraume keine Änderung erleidet.

Die Herleitung der Formeln (12) bis (15) bleibt im ε-Formalismus unverändert gültig.

§ 4. Der affine Zusammenhang.

Um invariante Differentialgleichungen für Spinoren aufstellen zu können, ist die Einführung einer kovarianten Differentiation (oder einer Parallelverschiebung) für Spinoren notwendig. Diese wird wie üblich für Spinvektoren durch lineare Formeln von der Art[1]

$$\left.\begin{aligned} \psi_{\alpha|k} &= \partial_k \psi_\alpha - \Gamma_{\alpha k}^{\ \ \rho}\psi_\rho \\ \psi^{\alpha}{}_{|k} &= \partial_k \psi^\alpha + \Gamma_{\rho k}^{\ \ \alpha}\psi^\rho \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

definiert. Transformiert man die Formeln (16) auf ein anderes Koordinatensystem und verlangt, daß die $\psi_{\alpha|k}$ oder $\psi^{\alpha}{}_{|k}$ sich kovariant, d. h. wie gemischte Größen transformieren sollen, so ergeben sich für Γ die Transformationsregeln

$$\Lambda_\sigma^\rho \Gamma_{\rho k}^{\ \ \alpha} = \Lambda_\rho^\alpha \Gamma'^{\ \ \rho}_{\sigma k} - \partial_k \Lambda_\sigma^\alpha .$$

Die Parallelverschiebung der konjugiert-komplexen Vektoren $\psi_{\dot{\alpha}}$, $\psi^{\dot{\alpha}}$ ist durch die der Vektoren ψ_α, ψ^α mitgegeben, sobald man verlangt, daß die Beziehung zwischen einem Vektor ψ^α und seinem konjugiert-komplexen Vektor $\psi^{\dot{\alpha}}$ bei Parallelverschiebung erhalten bleiben soll. Wir erhalten so eine kovariante Differentiation

$$\left.\begin{aligned} \psi_{\dot{\alpha}|k} &= \partial_k \psi_{\dot{\alpha}} - \Gamma_{\dot{\alpha} k}^{\ \ \dot{\rho}}\psi_{\dot{\rho}} \\ \psi^{\dot{\alpha}}{}_{|k} &= \partial_k \psi^{\dot{\alpha}} + \Gamma_{\dot{\rho} k}^{\ \ \dot{\alpha}}\psi^{\dot{\rho}} \end{aligned}\right\}$$

mit

$$\Gamma_{\dot{\alpha} k}^{\ \ \dot{\beta}} = \overline{\Gamma_{\alpha k}^{\ \ \beta}} .$$

Wir setzen weiter fest, daß ein beliebiger Tensor kovariant so differenziert werden soll wie ein Produkt von Vektoren, also z. B.:

$$a_{\dot{\lambda}\mu|k} = \partial_k a_{\dot{\lambda}\mu} - \Gamma_{\dot{\lambda} k}^{\ \ \dot{\rho}} a_{\dot{\rho}\mu} - \Gamma_{\mu k}^{\ \ \sigma} a_{\dot{\lambda}\sigma} .$$

---

[1] Zur Abkürzung ist $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ gesetzt. Wegen der Willkür der Koordinatenwahl im Spinraum hat die Differentiation ∂_k nicht kovarianten Charakter. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der Einführung der $\Gamma_{\alpha k}^{\ \ \rho}$. Daß man in den Formeln (16) beide Male dieselben $\Gamma_{\alpha k}^{\ \ \rho}$ mit entgegengesetzten Vorzeichen wählt, ist damit zu rechtfertigen, daß die invariante Relation $\psi_\alpha \chi^\alpha = \text{konst.}$ bei Parallelverschiebung der Vektoren ψ_α, χ^α erhalten bleiben soll, oder (was auf dasselbe hinauskommt) daß für ein Produkt $\psi_\alpha \chi^\alpha$ die Differentiationsregel gelten soll:

$$(\psi_\alpha \chi^\alpha)_{|s} = \psi_{\alpha|s}\chi^\alpha + \psi_\alpha \chi^{\alpha}{}_{|s} .$$

Wir verlangen von der kovarianten Differentiation, daß sie **volumtreu** sein soll, d. h. daß der Tensor $\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ die kovariante Ableitung Null hat:

$$\gamma_{\alpha\beta|k}\gamma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}|k} = 0. \tag{17}$$

Die Bedingung (17) hat nur für die eine von Null verschiedene Komponente $\gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}}$ wirkliche Bedeutung; sie heißt dann[1]

$$\partial_k(\gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}}) - \Gamma^{\,1}_{1k}\gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}} - \Gamma^{\,2}_{2k}\gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}} - \Gamma^{\,\dot{1}}_{\dot{1}k}\gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}} - \Gamma^{\,\dot{2}}_{\dot{2}k}\gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}} = 0$$

oder, wenn $\gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}} = \gamma$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} \partial_k\gamma - (\Gamma^{\,\alpha}_{\alpha k} + \Gamma^{\,\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}k})\gamma &= 0 \\ \Gamma^{\,\alpha}_{\alpha k} + \Gamma^{\,\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}k} &= \partial_k \log\gamma \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Da auf Grund von (8) mit jedem Tensor $a_{\lambda\mu}$ ein Weltvektor a^k verbunden ist, so induziert die Parallelverschiebung der Tensoren $a_{\lambda\mu}$ zugleich eine Parallelverschiebung der Vektoren a^k. Die zugehörige kovariante Ableitung ist durch

$$a^k{}_{|l} = \sigma^{k\lambda\mu} a_{\lambda\mu|l} \tag{19}$$

definiert. Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn man die kovariante Differentiation von a^k in der üblichen Weise durch ein $\Gamma^{\,s}_{kl}$ festlegt und dieses $\Gamma^{\,s}_{kl}$ so bestimmt, daß die kovariante Ableitung von $\sigma^{k\lambda\mu}$ gleich Null wird:

$$\sigma^{k\lambda\mu}{}_{|s} = \partial_s\sigma^{k\lambda\mu} + \Gamma^{\,k}_{rs}\sigma^{r\lambda\mu} + \Gamma^{\,\lambda}_{\rho s}\sigma^{k\rho\mu} + \Gamma^{\,\mu}_{\sigma s}\sigma^{k\lambda\sigma} = 0. \tag{20}$$

Die Formel (20) bestimmt offenbar die $\Gamma^{\,k}_{rs}$ eindeutig und hat (19) zur Folge. Eine weitere Folge von (17), (20) und der Differentiationsregel für Produkte ist, daß die kovariante Ableitung von

$$g^{kl} = \sigma^{k\lambda\mu}\sigma^l{}_{\lambda\mu} = \sigma^{k\lambda\mu}\sigma^{l\rho\sigma}\gamma_{\lambda\rho}\gamma_{\mu\sigma}$$

gleich Null wird[2]:

$$g^{kl}{}_{|s} = 0. \tag{21}$$

Wenn man nun noch verlangt, daß die Übertragung $\Gamma^{\,s}_{kl}$ symmetrisch ausfällt:

$$\Gamma^{\,k}_{rs} = \Gamma^{\,k}_{sr}, \tag{22}$$

so folgt aus (21) bekanntlich, daß die $\Gamma^{\,k}_{rs}$ gleich den durch g_{kl} bestimmten Christoffelsymbolen $\left\{ {rs \atop k} \right\}$ sein müssen. Die Symmetrieannahme ist die einfachste, die man machen kann: würde man sie nicht machen, so würde man als Differenz $\Gamma^{\,k}_{rs} - \Gamma^{\,k}_{sr}$ einen Tensor $S_{rs}^{\;\;k}$ erhalten, dessen physikalische Bedeutung nicht bekannt ist.

---

[1] Die Gleichung (17) ließe sich auch (wie später gezeigt wird) aus der Forderung $g_{kl|s} = 0$ ableiten, d. h. aus der Bedingung, daß ein starrer Maßstab bei Parallelverschiebung seine Länge nicht ändert.

[2] Man hätte auch umgekehrt von der Forderung (21) ausgehen und daraus umgekehrt (17) und (18) herleiten können.

Die Symmetriebedingung (22) ist, wenn man die Γ^{k}_{rs} aus (20) berechnet, mit 6.4 linearen Bedingungen für die 8.4 Real- und Imaginärteile der 4.4 Komponenten $\Gamma^{\;\mu}_{\rho s}$ gleichwertig. Diese reichen, zusammen mit den 4 Bedingungen (18), noch nicht zur Bestimmung der $\Gamma^{\;\mu}_{\rho s}$ aus, sondern es bleiben noch 4 reelle Parameter willkürlich. In der Tat: Sind die Gleichungen (18), (20) erfüllt, so bleiben sie es, wenn man die Γ^{k}_{rs} ungeändert läßt, die $\Gamma^{\;\mu}_{\rho s}$ und $\Gamma^{\;\dot\mu}_{\dot\rho s}$ aber durch

$$\Gamma^{\;\mu}_{\rho s} + \frac{i}{2}\varphi_s \delta^{\mu}_{\rho} \quad \text{und} \quad \Gamma^{\;\dot\mu}_{\dot\rho s} - \frac{i}{2}\varphi_s \delta^{\dot\mu}_{\dot\rho}$$

ersetzt. Es tritt hier also ganz von selbst eine willkürliche reelle Größe Φ_s auf, die durch

$$\Gamma^{\;\alpha}_{\alpha s} - \Gamma^{\;\dot\alpha}_{\dot\alpha s} = 2i\Phi_s \tag{23}$$

definiert wird. Wir wollen zunächst die Transformationseigenschaften von Φ_s untersuchen. Gegenüber Raumtransformationen verhält sich Φ_s wie ein Weltvektor. Bei Transformationen im Spinraume, wenn $\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$ ist, erhält man dagegen:

$$\Phi'_s = \Phi_s - \partial_s \varphi\,.$$

Dies folgt aus den Transformationsgleichungen

$$\Gamma'^{\;\alpha}_{\alpha s} = \Gamma^{\;\alpha}_{\alpha s} - \partial_s \log \Delta \text{ und } \Gamma'^{\;\dot\alpha}_{\dot\alpha s} = \Gamma^{\;\dot\alpha}_{\dot\alpha s} - \partial_s \log \bar\Delta\,.$$

Die Φ_s transformieren sich daher bei einer Transformation von der Form $a'^{\lambda} = e^{\frac{1}{2}i\varphi} a^{\lambda}$ genau so, wie es Potentiale nach dem Weylschen Prinzip der Eichinvarianz tun sollen. Φ_s soll daher mit dem elektromagnetischen Potential identifiziert werden.

Aus der Gleichung $\gamma_{12} = \sqrt{\gamma}\, e^{i\vartheta}$ folgt, daß sich $\partial_s \vartheta$ genau so wie Φ_s transformiert, d. h.

$$\partial_s \vartheta' = \partial_s \vartheta - \partial_s \varphi\,.$$

Daher ist

$$\Phi^*_s = \Phi_s - \partial_s \vartheta$$

ein wirklicher Vektor. Er ist vom elektromagnetischen Potential nur um den Gradienten einer Funktion verschieden. Eine physikalische Bedeutung scheint der Vektor Φ^*_s nicht zu haben.

Aus (18) und (23) lassen sich die verjüngten Größen $\Gamma^{\;\alpha}_{\alpha s}$ und $\Gamma^{\;\dot\alpha}_{\dot\alpha s}$ explizite berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\;\alpha}_{\alpha s} &= i\Phi_s + \partial_s \log \sqrt{\gamma} = i\Phi^*_s + \partial_s \log \sqrt{\gamma}\, e^{i\vartheta} \\ \Gamma^{\;\dot\alpha}_{\dot\alpha s} &= -i\Phi_s + \partial_s \log \sqrt{\gamma} = -i\Phi^*_s + \partial_s \log \sqrt{\gamma}\, e^{-i\vartheta} \end{aligned}\right\}.$$

Für kovariante Ableitung des Spinors $\gamma_{\lambda\mu}$ findet man daraus:

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma^{\lambda\mu}{}_{|s} = \quad i\gamma^{\lambda\mu}\,\Phi^*_s & \gamma^{\dot\lambda\dot\mu}{}_{|s} = -i\gamma^{\dot\lambda\dot\mu}\,\Phi^*_s \\ \gamma_{\lambda\mu|s} = -i\gamma_{\lambda\mu}\,\Phi^*_s & \gamma_{\dot\lambda\dot\rho|s} = \quad i\gamma_{\dot\lambda\dot\mu}\,\Phi^*_s \end{array}\right\}. \tag{24}$$

Im ε-Formalismus kann man die obigen Formeln (17) bis (24) nicht ohne weiteres übernehmen, sondern man muß zuerst eine kovariante Ableitung für Spinordichten definieren. Das geschieht dadurch, daß man zuerst für die kovariante Differentiation der Spindichten vom Gewicht $\mathfrak{f}$ den Ansatz

$$a_k = \partial_k a - \mathfrak{f}\,\Gamma_k\, a \tag{25}$$

macht. Der Faktor $\mathfrak{f}$ wird darum hinzugefügt, weil eine Dichte vom Gewicht $\mathfrak{f}$ die $\mathfrak{f}$-te Potenz einer Dichte vom Gewicht Eins ist. Damit das so definierte a_k eine Vektordichte sei, müssen die Γ_k sich bei einer Raumtransformation wie Vektorkomponenten, bei einer Spintransformation dagegen nach der Formel

$$\Gamma'_k = \Gamma_k - \partial_k \log \Delta \tag{26}$$

transformieren. Die kovariante Differentiation von beliebigen Spinordichten wird nun so definiert, wie sie sich für Produkte von Spinoren mit skalaren Dichten von selbst ergibt, also nach der gewöhnlichen Formel für kovariante Spinordifferentiation mit einem Zusatzglied $-\mathfrak{f}\,\Gamma_k$ mal dem betreffenden Spinor.

Die zunächst beliebig eingeführten Γ_k lassen sich eindeutig festlegen durch die invariante Forderung, daß die kovariante Ableitung der Spinordichte $\varepsilon_{\lambda\mu}$ (vom Gewicht -1) gleich Null ausfallen soll:

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_{12|k} = -\Gamma^1_{1k}\varepsilon_{12} - \Gamma^2_{2k}\,\varepsilon_{12} + \Gamma_k\,\varepsilon_{12} = 0 \\ \Gamma_k = \Gamma^a_{ak} \end{array}\right\}. \tag{27}$$

Für die konjugiert-komplexen Dichten vom Gewicht $\dot{\mathfrak{f}}$ ist in den obigen Formeln überall Γ_k durch das konjugiert-komplexe $\overline{\Gamma}_k$ zu ersetzen.

Das Produkt zweier Dichten der Gewichte $\mathfrak{f}$, $\dot{\mathfrak{f}}$ ist eine Dichte vom Absolutgewicht $2\mathfrak{f}$, deren kovariante Ableitung nach der gewöhnlichen Produkt-Differentiationsregel so heißen würde:

$$a_k = \partial_k a - \mathfrak{f}\,(\Gamma_k + \overline{\Gamma}_k)\,a\,.$$

Wir setzen nun

$$\Gamma_k + \overline{\Gamma}_k = \Gamma^a_{ak} + \Gamma^{\dot a}_{\dot a k} = 2\,\Pi_k$$

und definieren für beliebige Dichten vom Absolutgewicht $\mathfrak{f}$ die kovariante Ableitung durch

$$a_k = \partial_k a - \mathfrak{f}\,\Pi_k a\,.$$

Wie man Spinordichten vom Absolutgewicht $\mathfrak{f}$ und gemischte Dichten zu differenzieren hat, ist nunmehr klar.

Aus denselben Gründen wie oben werden wir versuchen, die kovariante Differentiation der Spinoren und der Weltvektoren so aufeinander abzustimmen, daß die kovariante Ableitung von $\sigma^{k\dot\lambda\mu}$ gleich Null ausfällt. Das gibt, weil $\sigma^{k\dot\lambda\mu}$ im ε-Formalismus eine Größe vom Absolutgewicht 1 ist, die Bedingung

$$\sigma^{k\dot\lambda\mu}{}_{|s} = \partial_s\,\sigma^{k\dot\lambda\mu} + \Gamma^k_{rs}\,\sigma^{r\dot\lambda\mu} + \Gamma^{\dot\lambda}_{\dot\rho s}\,\sigma^{k\dot\rho\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma s}\,\sigma^{k\dot\lambda\sigma} - \Pi_s\,\sigma^{k\dot\lambda\mu} = 0\,. \tag{28}$$

welche wieder die Γ^k_{rs} durch die $\Gamma^{\mu}_{\sigma s}$ und $\Gamma^{\dot\lambda}_{\dot\rho s}$ auszudrücken gestatten. Die Forderung, daß Γ^k_{rs} symmetrisch ausfällt, ergibt 6.4 Bedingungen für die 8.4 Real- und Imaginärteile der $\Gamma^{\mu}_{\rho s}$. Es bleiben also jetzt 8 reelle Parameter willkürlich. In der Tat: (28) bleibt erfüllt, wenn man $\Gamma^{\mu}_{\rho s}$ und $\Gamma^{\dot\mu}_{\dot\rho s}$ durch

$$\Gamma^{\mu}_{\rho s} + \tfrac{1}{2}(\pi_s + i\,\varphi_s)\,\delta^{\mu}_{\rho} \quad\text{und}\quad \Gamma^{\dot\mu}_{\dot\rho s} + \tfrac{1}{2}(\pi_s - i\,\varphi_s)\,\delta^{\dot\mu}_{\dot\rho}$$

ersetzt. Setzen wir also

$$\Gamma_s = \Gamma^{\alpha}_{\alpha s} = \Pi_s + i\Phi_s\,; \quad \overline{\Gamma}_s = \Gamma^{\dot\alpha}_{\dot\alpha s} = \Pi_s - i\Phi_s\,, \tag{29}$$

so finden wir, daß in diesem Formalismus nicht nur die Φ_s, sondern auch die Π_s willkürlich sind.

Wir werden jedoch sehen, daß diese letztere Willkür aus den physikalisch wichtigen Formeln ganz herausfällt, weil in diesen Formeln die $\Gamma^{\mu}_{\rho s}$ immer nur in den Kombinationen

$$\Gamma^{\mu}_{\rho s} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\rho}\,\Pi_s \quad \text{und} \quad \Gamma^{\dot\mu}_{\dot\rho s} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\dot\mu}_{\dot\rho}\,\Pi_s$$

vorkommen. Diese Kombinationen sind nämlich für die kovariante Differentiation der kontravarianten Spinvektordichten vom Gewicht $\frac{1}{2}$ und der kovarianten Spinvektordichten vom Gewicht $-\frac{1}{2}$ maßgebend, und es zeigt sich (vgl. § 7), daß nur solche Vektordichten eine wirkliche Rolle spielen. Wesentlich tritt aber in den Formeln die Größe Φ_s auf, die sich auch in diesem Formalismus bei Raumtransformationen wie ein Vektor, bei Spintransformationen von der Determinante $\Delta = |\Delta|\, e^{i\varphi}$ aber nach der aus (26) und (29) folgenden Formel

$$\Phi'_s = \Phi_s - \partial_s \varphi \tag{30}$$

transformiert.

Diese Größe Φ_s soll wieder mit dem elektromagnetischen Potential identifiziert werden.

§ 5. Die vollständig geodätischen Systeme.

Wir wollen jetzt die Komponenten der Größe $\sigma^{k\lambda\dot\mu}$ und der Parallelverschiebung in der Umgebung eines Weltpunktes P_0 in einem passend gewählten Koordinatensystem berechnen.

Ist der Raum euklidisch, so genügt man in einem in der Welt und im Spinraum passend gewählten Koordinatensystem den Bedingungen (11), (18), (20) und (22) durch folgende Werte der auftretenden Größen:

1. $g_{kl} = \overset{\circ}{g}_{kl}\,; \quad \overset{\circ}{g}_{11} = \overset{\circ}{g}_{22} = \overset{\circ}{g}_{33} = -\overset{\circ}{g}_{44} = -1\,,$ sonst $\overset{\circ}{g}_{kl} = 0$ (31a)

2. $\gamma^{\lambda\mu} = \varepsilon^{\lambda\mu}\,; \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1\,, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$ (31b)

3. $\sigma^{k\lambda\dot\mu} = \overset{\circ}{\sigma}{}^{k\lambda\dot\mu}\,; \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{1\lambda\dot\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{2\lambda\dot\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\overset{\circ}{\sigma}{}^{3\lambda\dot\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{4\lambda\dot\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (31c)

4. $\Gamma^{l}_{sk} = \left\{ {sk \atop l} \right\} = 0$ (31d)

5. $\Gamma^{\beta}_{\alpha s} = \frac{1}{2}\, i\, \Phi_s\, \delta^{\beta}_{\alpha}\,.$ (31e)

Diese Werte bleiben erhalten, wenn man in der Welt eine beliebige Lorentz-Transformation und gleichzeitig im Spinraum eine passende konstante lineare Transformation von der Determinante Eins ausführt[1].

---

[1] Für den Beweis siehe etwa B. L. v. d. Waerden, Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, § 20.

Bei gegebenen $g_{kl} = \mathring{g}_{kl}$ und $\gamma^{\lambda\mu} = \varepsilon^{\lambda\mu}$ sind die in (31c) angegebenen $\sigma^{k\lambda\mu}$ nicht die einzigen, welche die Bedingungen (11) erfüllen, sondern man hat noch die Freiheit einer willkürlichen Lorentz-Transformation, auszuüben auf den Index k, oder auch einer willkürlichen Spintransformation von der Determinante Eins, auszuüben auf die Indices λ, μ. Das ist aber auch die einzige Freiheit, die man hat. Denn die Bedingung (11) besagt laut Herleitung, daß bei der Zuordnung $a_{\lambda\mu} \rightarrow a^k$ die quadratische Form $\gamma^{\lambda\rho}\gamma^{\mu\sigma} a_{\lambda\mu} a_{\rho\sigma}$ in $\mathring{g}_{kl} a^k a^l$ übergeführt wird, und eine solche lineare Zuordnung ist völlig bestimmt bis auf eine lineare Transformation, welche die letztere quadratische Form invariant läßt, d. h. aber bis auf eine Lorentz-Transformation[1].

Wir gehen jetzt zum allgemeinen Fall des Riemannschen Raumes über. Wir denken uns, falls die γ-Symbolik zugrunde gelegt wird, das Koordinatensystem im Spinraum immer so gewählt, daß $\gamma^{12} = 1$ wird. Dann ist also zwischen $\gamma^{\lambda\mu}$ und $\varepsilon^{\lambda\mu}$ kein Unterschied. Für einen einzelnen Weltpunkt P_0 kann man außerdem durch eine passende lineare Transformation

$$x^k = c^k_{\ p}\, \mathring{x}^p,$$

die g_{kl} in $\mathring{g}_{kl}$ überführen. Die Vektoren $c^k_{\ 1}$, $c^k_{\ 2}$, $c^k_{\ 3}$, $c^k_{\ 4}$ müssen dazu nur ein orthogonales n-Bein bilden. Dann kann man durch den Ansatz

$$\sigma^{k\lambda\mu} = c^k_{\ p}\, \mathring{\sigma}^{p\lambda\mu}$$

ein System von Komponenten $\sigma^{k\lambda\mu}$ bestimmen, welches die Gleichung (11) befriedigt, also zum metrischen Feld paßt. Dieses System $\sigma^{k\lambda\mu}$ ist nach dem oben Bemerkten auch im wesentlichen (d. h. bis auf eine lineare Spintransformation) das einzige. Läßt man die $c^k_{\ p}$ differenzierbar vom betrachteten Weltpunkt abhängen, so ist das entstehende $\sigma^{k\lambda\mu}$-Feld auch differenzierbar.

Man kann aber für die unmittelbare Umgebung eines Punktes P_0 noch mehr erreichen. Wählt man das Koordinatensystem in P_0 so, daß in diesem Punkt $g_{kl} = \mathring{g}_{kl}$ wird, so kann man in diesem Punkt auch $c^k_p = \delta^k_p$, $\sigma^{k\lambda\mu} = \mathring{\sigma}^{k\lambda\mu}$ wählen. Nun kann man für jeden Punkt P der unmittelbaren Umgebung von P_0 das orthogonale n-Bein $c^k_{\ p}$ durch Parallelverschiebung des n-Beins δ^k_p von P_0 nach P bestimmen und die $\sigma^{k\lambda\mu}$ entsprechend festlegen. Analytisch läßt sich diese Parallelverschiebung dadurch leicht verfolgen, daß man ein in P_0 geodätisches Koordinatensystem zugrunde legt, in bezug auf welches also

$$(\partial_s g_{kl})_{P_0} = 0, \quad (\Gamma^l_{sk})_{P_0} = 0$$

ist. Die parallel verschobenen Vektoren $c^k_{\ p}$ genügen dann einfach der Bedingung

$$(\partial_s c^k_{\ p})_{P_0} = 0.$$

[1] Die »uneigentlichen« Lorentz-Transformationen, welche die Ablaufsrichtung der Zeit oder die Orientierung des Raumes umkehren, können auf Grund der in § 3 getroffenen Normierungen hier nicht auftreten.

Daraus folgt dann sofort

$$(\partial_s \sigma^{k\dot{\lambda}\mu})_{P_0} = 0,$$

d. h.: die $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$ sind wie die g_{kl} und $\gamma^{\lambda\mu}$ in bezug auf das gewählte Koordinatensystem in erster Näherung konstant. Aus dem so gefundenen $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$-Feld entsteht das allgemeinste bei den einmal gewählten Raumkoordinaten durch eine lineare Spintransformation.

Wir wollen ein solches Koordinatensystem, dessen Existenz eben bewiesen wurde, in bezug auf welches die Bedingungen

$$(g_{kl})_{P_0} = \mathring{g}_{kl}, \qquad (\partial_s g_{kl})_{P_0} = 0 \tag{32a}$$
$$(\gamma_{\lambda\mu})_{P_0} = \varepsilon_{\lambda\mu}, \qquad (\partial_s \gamma_{\lambda\mu})_{P_0} = 0 \tag{32b}$$
$$(\sigma^{k\dot{\lambda}\mu})_{P_0} = \mathring{\sigma}^{k\dot{\lambda}\mu}, \qquad (\partial_s \sigma^{k\dot{\lambda}\mu})_{P_0} = 0 \tag{32c}$$

erfüllt sind, ein vollständig geodätisches Koordinatensystem in P_0 nennen.

Wir können nun in bezug auf ein vollständig geodätisches Koordinatensystem in P_0 die Komponenten $\Gamma^{\rho}_{\alpha k}$ der Parallelverschiebung der Spinoren berechnen. Die Gleichungen (20) und (23) nehmen in P_0 die folgende einfache Form an:

$$\Gamma^{\dot{\lambda}}_{\dot{\rho}s}\mathring{\sigma}^{k\dot{\rho}\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho s}\mathring{\sigma}^{k\dot{\lambda}\rho} = 0 \tag{33}$$
$$\Gamma^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}s} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha s} = -2i\Phi_s. \tag{34}$$

Dieses elementare lineare Gleichungssystem hat nur eine Lösung; nämlich:

$$(\Gamma^{\beta}_{\alpha s})_{P_0} = \tfrac{1}{2} i\, \delta^{\beta}_{\alpha} \Phi_s. \tag{35}$$

Damit ist der bisher noch ausstehende Beweis geliefert, daß die $\Gamma^{\beta}_{\alpha s}$ bis auf die Willkür der Φ_s durch die Gleichungen (20) wirklich eindeutig bestimmt sind. Wenn das nämlich im vollständig geodätischen Koordinatensystem gilt, gilt es auch in jedem anderen.

Im ε-Formalismus fällt die Bedingung (32b) fort, und das hat zur Folge, daß ein vollständig geodätisches Bezugssystem noch die willkürliche Spintransformation $\alpha'^{\lambda} = \beta\,\alpha^{\lambda}$, $\beta = \varrho e^{i\vartheta}$, zuläßt.

Statt (20) hat man jetzt die Gleichung (28), die aus (20) entsteht, indem man $\Gamma^{\mu}_{\sigma s}$ und $\Gamma^{\dot{\lambda}}_{\dot{\rho}s}$ durch $\Gamma^{\mu}_{\sigma s} - \frac{1}{2}\Pi_s\,\delta^{\mu}_{\sigma}$ und $\Gamma^{\dot{\lambda}}_{\dot{\rho}s} - \frac{1}{2}\Pi_s\,\delta^{\dot{\lambda}}_{\dot{\rho}}$ ersetzt. Macht man diese Ersetzung auch in der Lösung (35), so erhält man die allgemeine Lösung im vollständig geodätischen Koordinatensystem:

$$(\Gamma^{\mu}_{\sigma s})_{P_0} = \tfrac{1}{2}(\Pi_s + i\,\Phi_s)\,\delta^{\mu}_{\sigma}$$
$$(\Gamma^{\dot{\lambda}}_{\dot{\rho}s})_{P_0} = \tfrac{1}{2}(\Pi_s - i\,\Phi_s)\,\delta^{\dot{\lambda}}_{\dot{\rho}}.$$

Auch hier besteht also außer der Willkür der Π_s und der Φ_s keine weitere Willkür bei der Bestimmung der $\Gamma^{\mu}_{\rho s}$. Die Willkür der Π_s fällt, wie schon bemerkt, heraus, wenn statt der $\Gamma^{\mu}_{\rho s}$ und $\Gamma^{\dot{\mu}}_{\dot{\rho}s}$ nur die Größen

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\mu}_{\rho s} = \Gamma^{\mu}_{\rho s} - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}\,\Pi_s \quad\text{und}\quad \overset{*}{\Gamma}{}^{\dot{\mu}}_{\dot{\rho}s} = \Gamma^{\dot{\mu}}_{\dot{\rho}s} - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}\,\Pi_s, \tag{36}$$

die für die kovariante Differentiation der kontra-(ko-)varianten Spinvektordichten vom Gewicht $\frac{1}{2}\,(-\frac{1}{2})$ maßgebend sind, betrachtet werden.

§ 6. Die Krümmungstensoren.

Im Riemannschen Raum existiert der wohlbekannte Krümmungstensor:

$$R^{r}_{kps} = -\partial_s \Gamma^{r}_{kp} + \partial_p \Gamma^{r}_{ks} - \Gamma^{h}_{kp} \Gamma^{r}_{hs} + \Gamma^{h}_{ks} \Gamma^{r}_{hp}.$$

Ähnlich kann auch für den Spinraum der gemischte Krümmungstensor gebildet werden. Seine Komponenten sind:

$$\left.\begin{aligned} P^{\mu}_{\lambda ps} &= -\partial_s \Gamma^{\mu}_{\lambda p} + \partial_p \Gamma^{\mu}_{\lambda s} - \Gamma^{\rho}_{\lambda p} \Gamma^{\mu}_{\rho s} + \Gamma^{\mu}_{\rho p} \Gamma^{\rho}_{\lambda s} \\ P^{\dot\mu}_{\dot\lambda ps} &= -\partial_s \Gamma^{\dot\mu}_{\dot\lambda p} + \partial_p \Gamma^{\dot\mu}_{\dot\lambda s} - \Gamma^{\dot\rho}_{\dot\lambda p} \Gamma^{\dot\mu}_{\dot\rho s} + \Gamma^{\dot\mu}_{\dot\rho p} \Gamma^{\dot\rho}_{\dot\lambda s} \end{aligned}\right\}. \tag{37}$$

Durch Verjüngung erhält man mit Rücksicht auf (23a) den schiefsymmetrischen Welttensor:

$$\left.\begin{aligned} P^{\rho}_{\rho ps} &= i(\partial_p \Phi_s - \partial_s \Phi_p) = iF_{ps} \\ P^{\dot\rho}_{\dot\rho ps} &= -i(\partial_p \Phi_s - \partial_s \Phi_p) = -iF_{ps} \end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

Es tritt hier von selbst der Welttensor $F_{ps} = -F_{sp}$ der **elektromagnetischen Feldstärke** auf.

Es soll jetzt die zwischen dem gemischten und Riemannschen Krümmungstensor bestehende Beziehung aufgesucht werden. Man findet zunächst durch Ausrechnung die gewohnten Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \psi^{\rho}{}_{|kl} - \psi^{\rho}{}_{|lk} &= \psi^{\sigma} P^{\rho}_{\sigma lk} \\ \psi_{\dot\rho|kl} - \psi_{\dot\rho|lk} &= \psi_{\dot\sigma} P^{\dot\sigma}_{\dot\rho kl} \end{aligned}\right\} \tag{39a}$$

$$\sigma^{k\dot\lambda\mu}{}_{|ps} - \sigma^{k\dot\lambda\mu}{}_{|sp} = \sigma^{k\dot\rho\mu} P^{\dot\lambda}_{\dot\rho sp} + \sigma^{k\dot\lambda\rho} P^{\mu}_{\rho sp} + \sigma^{r\dot\lambda\mu} R^{k}_{rsp}. \tag{39b}$$

Die linke Seite der Gleichung (39b) verschwindet identisch infolge von (20). Man hat also:

$$\sigma^{k\dot\rho\mu} P^{\dot\lambda}_{\dot\rho sp} + \sigma^{k\dot\lambda\rho} P^{\mu}_{\rho sp} + \sigma^{r\dot\lambda\mu} R^{k}_{rsp} = 0. \tag{40}$$

Man kann ohne weiteres R^{k}_{rsp} durch $P^{\dot\lambda}_{\dot\rho sp}$ und $P^{\lambda}_{\rho sp}$ ausdrücken. Man kann aber auch umgekehrt R^{k}_{rsp} als gegeben annehmen und die $P^{\lambda}_{\rho sp}$ aus (40) und (38) zu bestimmen versuchen. Die Gleichungen (38) und (40) sind befriedigt, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned} P^{\lambda}_{\rho sp} &= \tfrac{1}{2} R_{krsp} \sigma^{k\lambda\dot\nu} \sigma^{r}_{\dot\nu\rho} + \tfrac{1}{2} iF_{sp} \delta^{\lambda}_{\rho} \\ P^{\dot\lambda}_{\dot\rho sp} &= \tfrac{1}{2} R_{krsp} \sigma^{k\dot\lambda\nu} \sigma^{r}_{\nu\dot\rho} - \tfrac{1}{2} iF_{sp} \delta^{\dot\lambda}_{\dot\rho} \end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

Eine andere Lösung kann es bei gegebenen R^{k}_{rsp} und F_{sp} nicht geben, denn die Differenz zweier Lösungen müßte dem Gleichungssystem

$$\sigma^{k\dot\rho\mu} P^{\dot\lambda}_{\dot\rho sp} + \sigma^{k\dot\lambda\rho} P^{\mu}_{\rho sp} = 0$$

$$P^{\rho}_{\rho sp} = 0, \quad P^{\dot\rho}_{\dot\rho sp} = 0$$

genügen, welches für feste p (und $\sigma^{k\dot\lambda\mu} = \mathring{\sigma}^{k\dot\lambda\mu}$) mit dem Gleichungssystem (33), (34) (mit $\Phi_s = 0$) übereinstimmt, von welchem wir schon feststellten, daß es nur die Nullösung besitzt.

Im ε-Formalismus kann man sowohl aus den $\Gamma^{\mu}_{\lambda s}$ als auch aus den durch (36) definierten $\overset{*}{\Gamma}{}^{\mu}_{\lambda s}$ einen Krümmungstensor bilden. Tut man das letztere, ersetzt also in (37) überall $\Gamma^{\mu}_{\lambda s}$ durch $\overset{*}{\Gamma}{}^{\mu}_{\lambda s}$, so gelten auch die Formeln (38). Wir wollen uns für diese letztere Möglichkeit entscheiden, da die Parallelverschiebung $\Gamma^{\mu}_{\lambda s}$, in deren Krümmung noch die unbestimmte Größe Π_s eingeht, keine physikalische Bedeutung zu haben scheint. Die Formeln (39) gelten auch, sofern man unter ψ^{ρ} und ψ_{β} Spinordichten von den Absolutgewichten $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ versteht. Ebenso gelten (40) und (41).

§ 7. Die Diracschen Gleichungen.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet der Erhaltungssatz. Es sei $\mathfrak{J}^k$ der Stromvektor, der dem Erhaltungssatze gehorchen soll. Im Riemannschen Kontinuum ist daher:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_k \sqrt{-g}\,\mathfrak{J}^k = \mathfrak{J}^k{}_{|k} = 0.$$

Der Weltvektor $\mathfrak{J}^k$ induziert einen Spintensor $\varkappa^{\dot\lambda\mu}$, wobei

$$\mathfrak{J}^k = \sigma^{k\dot\lambda\mu}\varkappa_{\dot\lambda\mu} = \sigma^k{}_{\dot\lambda\mu}\varkappa^{\dot\lambda\mu}$$

ist. Wir verlangen also

$$\sigma^{k\dot\lambda\mu}\varkappa_{\dot\lambda\mu|k} = \sigma^k{}_{\dot\lambda\mu}\varkappa^{\dot\lambda\mu}{}_{|k} = 0. \tag{42}$$

Da $\mathfrak{J}^k$ ein reeller Weltvektor ist, muß $\varkappa^{\dot\lambda\mu}$ in den Indices $\dot\lambda$, μ vertauschbar sein. Dieser Bedingung und der anderen, daß $\mathfrak{J}^k$ ein zeitartiger Vektor mit $\mathfrak{J}^4 \geq 0$ sein soll, genügt man durch den folgenden einfachen Ansatz:

$$\varkappa^{\dot\lambda\mu} = \psi^{\dot\lambda}\psi^{\mu} + \chi^{\dot\lambda}\chi^{\mu}, \tag{43}$$

wo ψ^{λ}, χ^{μ} die Komponenten zweier Spinvektoren bezeichnen. Gleichung (42) kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(\sigma^k{}_{\dot\lambda\mu}\psi^{\dot\lambda}\psi^{\mu} + \sigma^{k\dot\lambda\mu}\chi_{\dot\lambda}\chi_{\mu})_{|k} = 0. \tag{44}$$

Durch Entwicklung dieser Gleichung findet man

$$\left.\begin{aligned} \psi^{\mu}\sigma^k{}_{\dot\lambda\mu}\psi^{\dot\lambda}{}_{|k} + \chi_{\mu}\sigma^{k\dot\lambda\mu}\chi_{\dot\lambda|k} & \\ + \psi^{\dot\lambda}\sigma^k{}_{\dot\lambda\mu}\psi^{\mu}{}_{|k} + \chi_{\dot\lambda}\sigma^{k\dot\lambda\mu}\chi_{\mu|k} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{45}$$

Der Erhaltungssatz ist daher erfüllt, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^k{}_{\dot\lambda\mu}\psi^{\dot\lambda}{}_{|k} &= \quad\alpha\chi_{\mu} \\ \sigma^{k\dot\lambda\mu}\chi_{\dot\lambda|k} &= -\alpha\psi^{\mu} \end{aligned}\right\}. \tag{46a}$$

Die zu diesen Gleichungen konjugiert komplexen sind:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{k}{}_{\lambda\dot{\mu}}\,\psi^{\lambda}{}_{|k} &= \bar{a}\,\chi_{\dot{\mu}} \\ \sigma^{k\lambda\dot{\mu}}\,\chi_{\lambda|k} &= -\bar{a}\,\psi^{\dot{\mu}} \end{aligned}\right\}. \tag{46b}$$

Die Gleichungen (46) bilden die allgemein-relativistische Verallgemeinerung der Diracschen Gleichungen. Man sieht zunächst, daß sie eine allgemein-kovariante Form besitzen, und zwar sowohl gegenüber beliebigen Transformationen im Riemannschen Raume als gegenüber beliebigen Spintransformationen. Der Faktor a kann nach der bisherigen Herleitung irgendeine Ortsfunktion sein; da aber in (43) die Phasen von ψ und χ noch ganz willkürlich sind, kann man sie stets so einrichten, daß a rein imaginär wird. Da wir keinen Grund haben, dem Elektron eine von Punkt zu Punkt veränderliche Masse zuzuschreiben, nehmen wir a als eine Konstante an.

Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß es im Punkte P_0 vollständig geodätisch ist (was nach § 5 immer möglich ist), so erhält man in der unmittelbaren Umgebung von P_0 die Diracschen Gleichungen in der gewohnten Form, wenn man für a und Φ_s

$$a = \frac{2\pi imc}{h\sqrt{2}}, \quad \Phi_s = \frac{2\pi}{h}\varphi_s$$

einsetzt, wo φ_s das elektromagnetische Potential des fremden Feldes ist. Die Welttensoren Φ_s, F_{pq}, welche die Parallelverschiebung und die Krümmung im Spinraum bestimmen, sollen daher (abgesehen von konstanten Faktoren) mit dem elektromagnetischen Potential und der Feldstärke identifiziert werden.

Die Gleichungen (46) definieren ein lineares selbstadjungiertes Eigenwertproblem für die 4 Komponenten ψ^{λ}, $\chi_{\dot{\lambda}}$. Um die Linearität einzusehen, hat man etwa die zweite Gleichung (46a) mit der ersten Gleichung (46b) zusammenzunehmen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{k\mu\dot{\lambda}}\,\chi_{\dot{\lambda}|k} &= -a\,\psi^{\mu} \\ \sigma^{k}{}_{\dot{\mu}\lambda}\,\psi^{\lambda}{}_{|k} &= \bar{a}\,\chi_{\dot{\mu}} = -a\,\chi_{\dot{\mu}} \end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

Führt man die Matrices

$$\left.\begin{aligned} {}'\sigma^{k} &= (\sigma^{k\alpha\dot{\beta}}), & \sigma^{k} &= (\sigma^{k}{}_{\dot{\alpha}\beta}), \\ \psi &= \begin{pmatrix}\psi^{1}\\ \psi^{2}\end{pmatrix}, & \chi &= \begin{pmatrix}\chi_{1}\\ \chi_{2}\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

ein, so kann man statt (47) auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} {}'\sigma^{k}\,\chi_{|k} &= -a\,\psi \\ \sigma^{k}\,\psi_{|k} &= -a\,\chi \end{aligned}\right\}$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{h\sqrt{2}}{2\pi i}$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\;{}'\sigma^k p_k \chi &= -mc\psi \\ \sqrt{2}\;\sigma^k p_k \psi &= -mc\psi \end{aligned}\right\}, \tag{49}$$

wo p_k der mit $\frac{h}{2\pi i}$ multiplizierte Operator der kovarianten Differentiation ist.

Um die Selbstadjungiertheit des Problems einzusehen, schreibe man (49) in 4reihige Matrices um:

$$\sum_k p_k \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\sigma^k & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\,{}'\sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & mc \\ mc & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{50a}$$

Die hier auftretenden Matrices haben alle die Eigenschaft der Hermiteschen Symmetrie. Wählt man nun das Koordinatensystem im Spinraum so, daß σ^4 gleich der Einheitsmatrix wird (was immer möglich ist, da σ^4 eine positiv-definite Hermitesche Form definiert, welche immer in die Einheitsform transformiert werden kann), so hat die Gleichung (50) die Form

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial t} + H\right)\Psi = 0$$

mit selbstadjungiertem H und $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$.

Zum Vergleich mit den vierreihigen Matrixtheorien eignet sich eine andere Matrixform der Gleichungen (49) besser, nämlich

$$\sum p_k \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\,{}'\sigma^k \\ \sqrt{2}\,\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = -mc \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{50b}$$

Die auf der linken Seite auftretenden Matrices sind die γ^k von Tetrode, welche die bekannten Relationen

$$\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k = 2g^{kl}$$

erfüllen: diese kommen nämlich auf

$$\left.\begin{aligned} {}'\sigma^k\,\sigma^l + {}'\sigma^l\,\sigma^k &= g^{kl} \\ \sigma^k\,{}'\sigma^l + \sigma^l\,{}'\sigma^k &= g^{kl} \end{aligned}\right\},$$

also auf (15) hinaus. Diese Matrices sind nicht Hermitesch; sie können es aber gemacht werden, indem man sie entweder (nach Schrödinger) mit γ_0 multipliziert und die zulässigen Koordinatensysteme durch geeignete

Vorschriften beschränkt oder (nach V. Bargmann[1]) durch Multiplikation mit einer anderen Matrix α die Hermitizität unabhängig vom Koordinatensystem erzwingt. Letzteres kommt im wesentlichen darauf hinaus, daß man zu der anderen Matrixgestalt (50a) übergeht, wo (wie wir sahen) alle Hermitizitätsschwierigkeiten verschwinden. Unsere Theorie unterscheidet sich also von den vierreihigen Matrixtheorien durch eine besondere Wahl der Koordinaten im vierdimensionalen Spinraum, wobei die Matrices γ^k die Gestalt (50b) annehmen und die vier Komponenten von Ψ sich in zwei Paare ψ^λ, $\chi_{\dot\lambda}$ trennen. Diese besondere Wahl ist aber in invarianter Weise dadurch ausgezeichnet, daß die beiden Paare bei Lorentztransformationen einzeln in sich transformiert werden.

Im ε-Formalismus ist

$$\varkappa^{\dot\lambda\mu} = \psi^{\dot\lambda}\psi^\mu + \chi^{\dot\lambda}\chi^\mu$$

kein Spinor, sondern eine Spinordichte vom Gewichte $+1$, da nur in diesem Falle eine eindeutige Beziehung zwischen $\varkappa^{\dot\lambda\mu}$ und dem Weltvektor $\mathfrak{J}^s$ besteht. Die ψ^λ, χ^λ sind dann Spinordichten vom Absolutgewichte $+\frac{1}{2}$, ψ_λ, χ_λ, vom Absolutgewichte $-\frac{1}{2}$. Bei Ausführung der kovarianten Differentiation und in dem Krümmungstensor treten nur die $\overset{*}{\Gamma}{}^\rho_{\lambda s}$ auf. Sonst gelten alle Resultate dieses und der beiden folgenden Paragraphen auch im ε-Formalismus.

§ 8. Der Übergang zu den Gleichungen zweiter Ordnung.

Setzt man $\chi_{\dot\lambda}$ aus (46b) in (46a) ein, so erhält man:

$$\sigma^{k\dot\lambda\mu}\sigma^l_{\dot\lambda\rho}\,\psi^\rho{}_{|lk} = -\alpha\bar\alpha\,\psi^\mu. \tag{51}$$

Es soll hier die linke Seite dieser Gleichung ausgerechnet werden. Durch einfache Umschreibung und Anwendung von (39a) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha\bar\alpha\,\psi^\mu &= \tfrac{1}{2}\sigma^{k\dot\lambda\mu}\sigma^l_{\dot\lambda\rho}\,\psi^\rho{}_{|lk} + \tfrac{1}{2}\sigma^{l\dot\lambda\mu}\sigma^k_{\dot\lambda\rho}\,\psi^\rho{}_{|kl} \\ &= \tfrac{1}{2}(\sigma^{k\dot\lambda\mu}\sigma^l_{\dot\lambda\rho} + \sigma^{l\dot\lambda\mu}\sigma^k_{\dot\lambda\rho})\psi^\rho{}_{|lk} + \tfrac{1}{2}\sigma^{l\dot\lambda\mu}\sigma^k_{\dot\lambda\rho}\,\psi^\sigma P^\rho_{\sigma lk} \end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

Das erste Glied rechts ergibt nach (15)

$$\tfrac{1}{2}g^{kl}\,\psi^\mu{}_{|lk}\,.$$

Wir gehen zur Berechnung des zweiten Ausdruckes über. Es folgt aus (41):

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\sigma^{l\dot\lambda\mu}\sigma^k_{\dot\lambda\rho}\,\psi^\sigma P^\rho_{\sigma lk} &= \tfrac{1}{4}\sigma^{l\dot\lambda\mu}\sigma^k_{\dot\lambda\rho}\,\psi^\sigma R_{pslk}\,\sigma^{p\rho\dot\nu}\sigma^s_{\dot\nu\sigma} \\ &\quad + \frac{i}{4}\sigma^{l\dot\lambda\mu}\sigma^k_{\dot\lambda\rho}\,\psi^\rho F_{lk} \end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

[1] V. Bargmann, S.-B. preuß. Ak. Wiss. 1932, S. 346.

Wir wollen zum Schluß beweisen:

$$\tfrac{1}{4} R_{pslk}\, \sigma^{p\rho\dot{\nu}}\, \sigma^{s}_{\dot{\nu}\sigma}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{k}_{\dot{\lambda}\rho}\, \psi^{\sigma} = \tfrac{1}{8} R\, \psi^{\mu}. \tag{54}$$

(R = Krümmungsskalar)

Die Umschreibung der linken Seite dieser Gleichung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{4} R_{pslk}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{k}_{\dot{\lambda}\rho}\, \sigma^{p\rho\dot{\nu}}\, \sigma^{s}_{\dot{\nu}\rho} = {} & \tfrac{1}{4} R_{pslk}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{k}_{\dot{\lambda}\rho}\, \sigma^{p\rho\dot{\nu}}\, \sigma^{s}_{\dot{\nu}\sigma} \\ & + \tfrac{1}{4} R_{pslk}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{p}_{\dot{\lambda}\rho}\, \sigma^{k\rho\dot{\nu}}\, \sigma^{s}_{\dot{\nu}\sigma} \\ & - \tfrac{1}{4} R_{kslp}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{k}_{\dot{\lambda}\rho}\, \sigma^{p\rho\dot{\nu}}\, \sigma^{s}_{\dot{\nu}\sigma} \end{aligned}\right\}. \tag{55}$$

Die zwei ersten Glieder ergeben in der Tat $\frac{1}{8} R\, \delta^{\mu}_{\sigma}$. Man ersieht dies, indem man (15) anwendet und die bekannten Definitionen von R_{kl}, R, berücksichtigt. Der Beweis von (54) wäre daher erbracht, wenn man zeigen könnte, daß das letzte Glied in (55) verschwindet.

Wir schreiben das letzte Glied in der Form:

$$-\tfrac{1}{12}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{k}_{\dot{\lambda}\rho}\, \sigma^{p\rho\dot{\nu}}\, \sigma^{s}{}_{\dot{\nu}\sigma} (R_{kslp} + R_{kslp} + R_{kslp}). \tag{56}$$

Wendet man jetzt wiederholt eine zu (55) ganz analoge Umformung, so erhält man aus (56)

$$-\tfrac{1}{12}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{k}_{\dot{\lambda}\rho}\, \sigma^{p\rho\dot{\nu}}\, \sigma^{s}_{\dot{\nu}\sigma} [R_{kslp} - R_{pslk} - R_{lskp}].$$

Infolge der Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors kann der Klammerausdruck auch in der Form

$$R_{kslp} + R_{klps} + R_{kpsl}$$

geschrieben werden. Das verschwindet aber identisch und daher ist auch (54) bewiesen.

Die Gleichung (51), die den Ausgangspunkt dieser Rechnungen bildete, kann daher in der Form

$$g^{lk}\, \psi^{\mu}{}_{|lk} + \tfrac{1}{4} R\, \psi^{\mu} + \frac{i}{2} F_{lk}\, \sigma^{l\dot{\lambda}\mu}\, \sigma^{k}_{\dot{\lambda}\sigma}\, \psi^{\sigma} = -2\, \alpha \bar{\alpha}\, \psi^{\mu} \tag{57a}$$

geschrieben werden. Analog findet man für $\chi_{\dot{\mu}}$:

$$g^{lk}\, \chi_{\dot{\mu}|lk} + \tfrac{1}{4} R\, \chi_{\dot{\mu}} + \frac{i}{2} F_{lk}\, \sigma^{l}{}_{\lambda\dot{\mu}}\, \sigma^{k\lambda\dot{\sigma}}\, \chi_{\dot{\sigma}} = -2\, \alpha \bar{\alpha}\, \chi_{\dot{\mu}}. \tag{57b}$$

Das erste Glied auf der linken Seite und die rechte Seite von (57) entsprechen den in der Gordon-Kleinschen Gleichung auftretenden Ausdrücken. Außer diesen und außer dem (die elektromagnetische Feldstärke enthaltendem) Spingliede tritt in diesen Gleichungen noch der Krümmungsskalar auf.

§ 9. Der Energie-Impuls-Tensor.

Kann aus den das Wellenfeld charakterisierenden Größen der Energie-Impuls-Tensor gebildet werden? Er müßte reell sein und den folgenden Gleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} T^{kl} &= T^{lk} \\ T^{lk}{}_{|l} &= F^{sk} J_s \end{aligned}\right\} . \tag{58}$$

Man kann zeigen, daß der zweiten dieser Bedingungen der Welttensor

$$\left.\begin{aligned} 'T^l_k &= i(\psi^\lambda \sigma^l_{\lambda\dot{\mu}} \psi^{\dot{\mu}}{}_{|k} - \psi^{\dot{\lambda}} \sigma^l{}_{\dot{\lambda}\mu} \psi^\mu{}_{|k}) \\ &- i(\chi_\lambda \sigma^{l\lambda\dot{\mu}} \chi_{\dot{\mu}|k} - \chi_{\dot{\lambda}} \sigma^{l\dot{\lambda}\mu} \chi_{\mu|k}) \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

genügt. Man erkennt gleich, daß $'T^l_k$ reell ist. Zwecks Berechnung von $'T^l_{k|l}$ wollen wir zunächst feststellen, welchen Beitrag zu $'T^l{}_{k|l}$ das erste Glied von (59) liefert. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} i(\psi^\lambda \sigma^l_{\lambda\dot{\mu}} \psi^{\dot{\mu}}{}_{|k})_{|l} &= i\bar{a}\chi_{\dot{\mu}} \psi^{\dot{\mu}}{}_{|k} + ia\psi^\mu \chi_{\mu|k} \\ &+ \frac{i}{2} \sigma^l_{\lambda\dot{\mu}} R_{prlk} \sigma^{p\dot{\mu}\nu} \sigma^r_{\dot{\rho}\nu} \psi^\lambda \psi^{\dot{\rho}} \\ &+ \tfrac{1}{2} F_{lk} \sigma^l_{\lambda\dot{\mu}} \psi^\lambda \psi^{\dot{\mu}} \end{aligned}\right\} . \tag{60}$$

Wird das den Krümmungstensor enthaltende Glied auf ganz analoge Weise wie im vorigen § umgeformt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} i(\psi^\lambda \sigma^l_{\lambda\dot{\mu}} \psi^{\dot{\mu}}{}_{|k})_{|l} &= i\bar{a}\chi_{\dot{\mu}} \psi^{\dot{\mu}}{}_{|k} + ia\psi^\mu \chi_{\mu|k} \\ &- \frac{i}{2} R_{kl} \sigma^l_{\lambda\dot{\mu}} \psi^\lambda \psi^{\dot{\mu}} + \tfrac{1}{2} F_{lk} \sigma^l_{\lambda\dot{\mu}} \psi^\lambda \psi^{\dot{\mu}} \end{aligned}\right\} . \tag{61}$$

Die Berechnung der anderen Glieder und Summation ergibt:

$$'T^{lk}{}_{|l} = F^{sk} J_s . \tag{62}$$

Der Tensor $'T^{lk}$ ist reell, genügt dem Erhaltungssatze, ist aber nicht symmetrisch. Kann der Tensor $'T^{lk}$ symmetrisiert werden? D. h.: Genügt auch der Tensor

$$T^{lk} = \tfrac{1}{2}('T^{lk} + 'T^{kl}) \tag{63}$$

dem Erhaltungssatze? Es soll gezeigt werden, daß es in der Tat der Fall ist. Wir wollen daher jetzt nicht, wie vorher $'T^{lk}{}_{|l}$, sondern $'T^{kl}{}_{|l}$ berechnen.

Für $'T^{kl}$ haben wir den folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} 'T^{kl} &= ig^{sl}(\psi^\lambda \sigma^k_{\lambda\dot{\mu}} \psi^{\dot{\mu}}{}_{|s} - \psi^{\dot{\lambda}} \sigma^k_{\dot{\lambda}\mu} \psi^\mu{}_{|s}) \\ &- ig^{sl}(\chi_\lambda \sigma^{k\lambda\dot{\mu}} \chi_{\dot{\mu}|s} - \chi_{\dot{\lambda}} \sigma^{k\dot{\lambda}\mu} \chi_{\mu|s}) \end{aligned}\right\} . \tag{64}$$

Wir berechnen auch jetzt den vom ersten Gliede gelieferten Beitrag zu $'T^{kl}{}_{|l}$, wobei wir die Gleichungen (57) berücksichtigen:

$$\left.\begin{aligned} i g^{sl}(\psi^{\lambda}\sigma^{k}_{\lambda\dot\mu}\psi^{\dot\mu}{}_{|s})_{|l} &= i g^{sl}\psi^{\lambda}{}_{|l}\sigma^{k}_{\lambda\dot\mu}\psi^{\dot\mu}{}_{|s} + i g^{sl}\psi^{\lambda}\sigma^{k}_{\lambda\dot\mu}\psi^{\dot\mu}{}_{|sl} \\ &= i g^{sl}\psi^{\lambda}{}_{|l}\sigma^{k}_{\lambda\dot\mu}\psi^{\dot\mu}{}_{|s} - 2\alpha\bar\alpha i\,\psi^{\dot\mu}\psi^{\lambda}\sigma^{k}_{\lambda\dot\mu} \\ &\quad - \frac{i}{4}R\,\psi^{\dot\mu}\psi^{\lambda}\sigma^{k}_{\lambda\dot\mu} - \tfrac{1}{2}F_{pr}\sigma^{p\rho\dot\mu}\sigma^{r}_{\rho\dot\sigma}\psi^{\dot\sigma}\psi^{\lambda}\sigma^{k}_{\lambda\dot\mu} \end{aligned}\right\}. \tag{65}$$

Nach Ausführung einer analogen Rechnung an den anderen Gliedern und Summation erhält man:

$$'T^{kl}{}_{|l} = F^{sk}\mathfrak{J}_s. \tag{66}$$

Daraus folgt aber, daß der durch (63) definierte Tensor symmetrisch ist und den Erhaltungssätzen genügt, d. h. die Bedingungen (58) erfüllt. Er gibt den Beitrag des einen betrachteten Elektrons zum Energie-Impulstensor der Welt.

Wir wollen jetzt den einfachsten Fall annehmen, und zwar den des freien Elektrons. Es verschwindet dann der Tensor F_{sk}, und wir haben einfach

$$T^{lk}{}_{|k} = 0. \tag{67}$$

Die Kenntnis des Energie-Impuls-Tensors ermöglicht die Aufstellung der Gravitationsgleichungen. Für den Fall des freien Elektrons und beim Fehlen von fremden Massen im betrachteten Gebiet ist:

$$R^{l}_{k} - \tfrac{1}{2}\delta^{l}_{k}R = \varkappa T^{l}_{k} \tag{68}$$

($\varkappa =$ Gravitationskonstante). Die Verjüngung in den Indices k und l ergibt

$$-R = \varkappa T = 2i\varkappa(\alpha\chi_{\lambda}\psi^{\lambda} - \bar\alpha\chi_{\dot\lambda}\psi^{\dot\lambda}). \tag{69}$$

Der Skalar $T = T^{k}_{k}$ kann daher (bei entsprechender Normierung von ψ^{μ} und $\chi_{\dot\mu}$) mit der Massendichte identifiziert werden.

Wenn es erlaubt ist, die Gravitationswirkung des freien Elektrons auf sich selbst dadurch zu berechnen, daß man den aus (69) sich ergebenden Wert von R in (57) einsetzt, so ergeben sich die folgenden nichtlinearen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} g^{kl}\psi^{\mu}{}_{|lk} - \frac{i}{2}\varkappa\,\psi^{\mu}(\alpha\chi_{\lambda}\psi^{\lambda} - \bar\alpha\chi_{\dot\lambda}\psi^{\dot\lambda}) &= -2\alpha\bar\alpha\,\psi^{\mu} \\ g^{kl}\psi_{\dot\mu|lk} - \frac{i}{2}\varkappa\,\chi_{\dot\mu}(\alpha\chi_{\lambda}\psi^{\lambda} - \bar\alpha\chi_{\dot\lambda}\psi^{\dot\lambda}) &= -2\alpha\bar\alpha\,\chi_{\dot\mu} \end{aligned}\right\}. \tag{70}$$

Das mit $\varkappa$ behaftete Glied ist selbstverständlich sehr klein im Vergleich mit $2\,\alpha\bar\alpha$, so daß man in erster Annäherung in einem in P_0 vollständig geodätischen System die Gordon-Kleinsche Gleichung erhält.

Ausgegeben am 30. Mai.

Berichtigung

zu der Arbeit L. Infeld und B. L. van der Waerden, Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Hr. Prof. J. A. Schouten macht uns in freundlicher Weise auf folgende Fehler aufmerksam.

In § 4, letzter Absatz (kleine Typen) soll statt »Gewicht $\frac{1}{2}$« und »Gewicht $-\frac{1}{2}$« stehen »Absolutgewicht $\frac{1}{2}$« und »Absolutgewicht $-\frac{1}{2}$«. Desgleichen in § 5, letzter Absatz.

Der letzte Absatz von § 7 (kleine Typen) soll so heißen:

»Im ε-Formalismus ist

$$\varkappa^{\dot\lambda\mu} = \psi^{\dot\lambda}\psi^{\mu} + \chi^{\dot\lambda}\chi^{\mu} = \psi^{\dot\lambda}\psi^{\mu} + \varepsilon^{\dot\lambda\dot\rho}\varepsilon^{\mu\sigma}\chi_{\dot\rho}\chi_{\sigma} \tag{50c}$$

kein Spinor, sondern eine Spinordichte vom Absolutgewicht + 1, da nur in diesem Falle eine eineindeutige Beziehung zwischen $\varkappa^{\dot\lambda\mu}$ und dem Weltvektor J^{s} besteht. Es liegt also nahe, unter ψ^{λ} (und $\psi^{\dot\lambda}$) Spinoren vom Absolutgewicht $\frac{1}{2}$ zu verstehen. Die Diracschen Gleichungen (47) verlangen dann, daß χ_{μ} und $\chi_{\dot\mu}$ Spinoren vom Absolutgewicht $-\frac{1}{2}$ seien. In den Transformationsformeln für χ^{μ} und ψ_{λ} gehen dann aber die Zahlenfaktoren $|\Delta|^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}$ bzw. $|\Delta|^{-\frac{1}{2}}\Delta$ ein. Wenn wir also verabreden, uns die Spinordichten ψ^{λ} und χ_{μ} vom Absolutgewicht $\pm\frac{1}{2}$, die in (47) auch allein vorkommen, als physikalisch-bedeutsame Größen zu betrachten, die ψ_{λ} und χ^{μ} dagegen als reine Rechengrößen, die aus den endgültigen Formeln immer eliminiert werden können (wie in 50c), so gilt für die physikalisch-bedeutsamen Größen der Ausspruch von § 4, daß sie alle Vektordichten vom Gewicht $\pm\frac{1}{2}$ (+ für kontra, — für kovariant) sind oder sich aus solchen Dichten zusammensetzen. In den Formeln für ihre kovariante Differentiation treten nur die $\overset{*}{\Gamma}{}^{\rho}_{\lambda s}$ auf.«

Ausgegeben am 3. Juli.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.