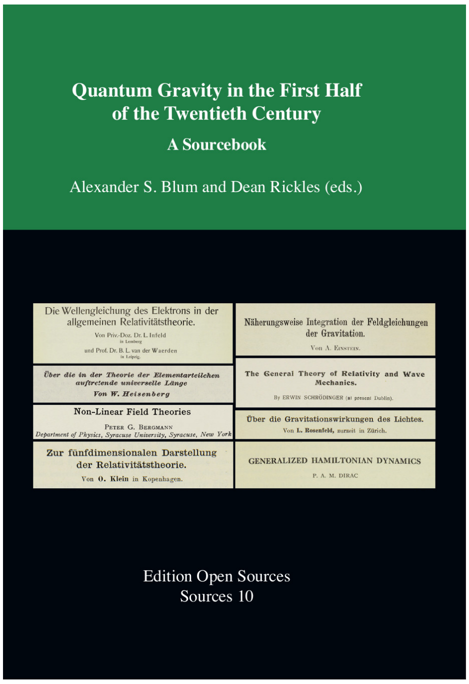
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Hugo Tetrode (1928): Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons

DOI: 10.34663/9783945561317-12



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 10
Hugo Tetrode (1928): Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons

Hugo Tetrode (1928). Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 50: 336–346.

Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons.

Von **H. Tetrode** in Amsterdam.

(Eingegangen am 19. Juni 1928.)

§ 1. Algebraische Beziehungen für die verallgemeinerten Diracschen Matrizen γ_μ. — § 2. Beschränkung der zuzulassenden kanonischen Transformationen. — § 3. Das Wirkungsprinzip und die für die γ_μ vorzuschreibende partielle Differentialgleichung. — § 4. Das Erhaltungsgesetz der Elektrizität und der Impuls-Energiesatz.

Im folgenden wird eine Erweiterung der Diracschen Theorie* vorgenommen, die der Forderung der allgemeinen Kovarianz genügt, und zugleich eine direktere Ableitung des Impuls-Energiesatzes gestattet, als auf dem Boden der speziellen Relativität möglich war**.

§ 1. Die Diracschen Bedingungsgleichungen für die vier vierreihigen Matrizen γ_μ:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\,\delta_\mu^\nu \qquad (\delta_\mu^\nu = 1 \text{ für } \mu = \nu \text{ und } = 0 \text{ für } \mu \neq \nu), \tag{1}$$

ersetzen wir durch

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\,g_{\mu\nu}, \tag{2}$$

wo $g_{\mu\nu}$ die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors sind. Wie in der klassischen Theorie sollen sie stets „gewöhnliche" Größen sein, d. h. sie sollen sich von der Einheitsmatrix nur durch einen Faktor unterscheiden und sind daher mit allen Matrizen aus der Gruppe der γ_μ bei der Multiplikation vertauschbar. Nach (2) sind die γ_μ ebenso wie die $g_{\mu\nu}$ im allgemeinen Raumzeitfunktionen, während sie früher als Konstanten betrachtet werden konnten***. Neben den kovarianten Vektorkomponenten γ_μ definieren wir kontravariante γ^μ durch

$$\gamma^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} \gamma_\nu, \tag{3}$$

wo die $g^{\mu\nu}$ die aus der allgemeinen Relativitätstheorie bekannte Bedeutung haben. Aus (2) und (3) folgt

$$\left.\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma^\mu &= 2\,\delta_\nu^\mu \\ \text{und} \qquad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2\,g^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

* P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **117**, 610 und **118**, 351, 1928; Friedrich Möglich, ZS. f. Phys. **48**, 852, 1928; J. v. Neumann, ebenda, S. 868.

** H. Tetrode, ZS. f. Phys. **49**, 858, 1928, als I zitiert.

*** Dirac spricht gelegentlich davon, daß die γ_μ Funktionen der Zeit wären; es sind dann aber die Volumenintegrale über $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ gemeint.

Wir bilden den kovarianten Sechservektor mit den Komponenten

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu} = \tfrac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \tag{5}$$

für deren Quadrate sich nach (2) ergibt:

$$\alpha_{\mu\nu}^2 = (\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu})(g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) = g_{\mu\nu}^2 - g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}. \tag{6}$$

Diese sind also gewöhnliche Größen und gleich negativ genommenen Unterdeterminanten zweiter Ordnung der Determinante g des Fundamentaltensors.

Ferner bilden wir die skalare Dichte

$$\gamma = \frac{1}{4!} \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma} \delta_{\mu\nu\varrho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varrho \gamma_\sigma \tag{7}$$

($\delta_{\mu\nu\varrho\sigma} = +1$ oder $= -1$, je nachdem $\mu\,\nu\,\varrho\,\sigma$ eine gerade oder eine ungerade Permutation der Indizes 1, 2, 3, 4 ist; $\delta_{\mu\nu\varrho\sigma} = 0$, falls $\mu, \nu, \varrho, \sigma$ nicht sämtlich verschieden sind). Deren Quadrat γ^2 besteht aus einer Summe von Produkten von je acht Faktoren γ_μ, unter denen jedes γ_μ zweimal vorkommt. Wir können daher durch wiederholte Anwendung der Vertauschungsrelationen (2) erreichen, daß schließlich nur gleiche γ_μ nebeneinander vorkommen und dann γ_μ^2 durch $g_{\mu\mu}$ ersetzen. Es ergibt sich also für γ^2 eine Summe von Produkten von je vier Faktoren $g_{\mu\nu}$, unter deren acht Indizes jede der Zahlen 1, 2, 3, 4 zweimal vorkommen muß. Da γ^2 den Transformationscharakter des Quadrats einer skalaren Dichte hat, schließen wir, daß es bis auf einen Zahlenfaktor gleich der Determinante g der $g_{\mu\nu}$ sein muß. Der Faktor bestimmt sich für den Spezialfall (1) zu 1, und daher ist

$$\gamma^2 = g. \tag{8}$$

Die γ entsprechende kontravariante Bildung ist

$$\beta = \frac{1}{4!} \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma} \delta_{\mu\nu\varrho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\varrho \gamma^\sigma, \tag{9}$$

für deren Quadrat sich auf ebensolche Weise wie oben ergibt:

$$\beta^2 = \frac{1}{g}. \tag{10}$$

Ferner ist

$$\beta\gamma = \frac{1}{(4!)^2} \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma,\alpha,\beta,\varkappa,\lambda} \delta_{\mu\nu\varrho\sigma} \delta_{\alpha\beta\varkappa\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\varrho \gamma^\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\varkappa \gamma_\lambda$$

$$= \frac{1}{(4!)^2} \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma,\alpha,\beta,\varkappa,\lambda,a,b,k,l} g_{\alpha a} g_{\beta b} g_{\varkappa k} g_{\lambda l} \delta_{\mu\nu\varrho\sigma} \delta_{\alpha\beta\varkappa\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\varrho \gamma^\sigma \gamma^a \gamma^b \gamma^k \gamma^l.$$

Wegen

$$\sum_{\alpha,\beta,\varkappa,\lambda} \delta_{\alpha\beta\varkappa\lambda} g_{\alpha a} g_{\beta b} g_{\varkappa k} g_{\lambda l} = \delta_{abkl}\, g$$

ergibt sich

$$\beta\gamma = \beta^2 g = 1, \tag{11}$$

unter Beachtung von (10).

Schließlich bilden wir noch die kontravariante Vektordichte mit den Komponenten:

$$\beta^{\mu} = \frac{1}{3!} \sum_{\nu, \varrho, \sigma,} \delta_{\mu\nu\varrho\sigma} \gamma_{\nu} \gamma_{\varrho} \gamma_{\sigma}, \tag{12}$$

und finden nach einer ähnlichen Schlußweise, wie sie oben zur Ableitung von (8) angewandt wurde:

$$\beta^{\mu} \beta^{\nu} + \beta^{\nu} \beta^{\mu} = -2 g g^{\mu\nu}. \tag{13}$$

§ 2. Die allgemein-kovariante Verallgemeinerung der früheren Gleichungen I, (8) und (7) ist offenbar

$$\sum_{\mu} \gamma^{\mu} \left(\frac{h}{2\pi} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\mu}} + \frac{i e}{c} \varphi_{\mu} \chi \right) - m c \chi = 0 \tag{14}$$

und

$$\sum_{\mu} \left(-\frac{h}{2\pi} \frac{\partial \omega}{\partial x^{\mu}} + \frac{i e}{c} \varphi_{\mu} \omega \right) \gamma^{\mu} - m c \omega = 0, \tag{15}$$

wo letztere Gleichung mit anderer Faktorenfolge geschrieben wurde.

Durch eine kanonische Transformation

$$\gamma_{\mu} \rightarrow S \gamma_{\mu} S^{-1}, \ \chi \rightarrow S \chi, \ \omega \rightarrow \omega S^{-1} \tag{16}$$

geht (14) über in

$$S \left\{ \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \left(\frac{h}{2\pi} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\mu}} + \frac{h}{2\pi} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \chi + \frac{i e}{c} \varphi_{\mu} \chi \right) - m c \chi \right\} = 0$$

oder, nach Multiplikation mit S^{-1}:

$$\sum_{\mu} \gamma^{\mu} \left(\frac{h}{2\pi} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\mu}} + \frac{h}{2\pi} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \chi + \frac{i e}{c} \varphi_{\mu} \chi \right) - m c \chi = 0, \tag{17}$$

und Analoges gilt für (15). Würden wir also beliebige kanonische Transformationen zulassen, so wäre unser Gleichungssystem im allgemeinen für sie nicht mehr invariant. Im früheren Falle konstanter $g_{\mu\nu}$ erschien es sinnvoll, sich auf konstante Transformationsmatrizen S zu beschränken, wodurch (17) mit (14) identisch wird. Jetzt, wo die γ_{μ} Raumzeitfunktionen sind, wird man dasselbe auch für S annehmen müssen. Da jedoch die Invarianz von (14) gefordert werden muß, können wir nur solche S zulassen, für die gilt

$$\sum_{\mu} \gamma^{\mu} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} = \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}, \tag{18}$$

mit einer „gewöhnlichen" Größe f. Dann bedeutet (16) einfach Ersatz von χ durch χe^{f}, was nur eine Änderung der Bezeichnungsweise und daher physikalisch unwesentlich ist.

Wir werden jetzt zeigen, daß diese Bedingung erfüllt ist, falls die Rotation und die Divergenz von γ_μ durch (16) unverändert gelassen werden, in Formeln:

$$\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (S \gamma_\mu S^{-1})}{\partial x^\nu} - \frac{\partial (S \gamma_\nu S^{-1})}{\partial x^\mu}$$

und

$$\sum_\mu \frac{\partial (\gamma^\mu \sqrt{-g})}{\partial x^\mu} = \sum_\mu \frac{\partial (S \gamma^\mu S^{-1} \sqrt{-g})}{\partial x^\mu},$$

oder*

$$\left.\begin{aligned} & S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \gamma_\mu - \gamma_\mu S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \gamma_\nu - \gamma_\nu S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \\ \text{und} \quad & \sum_\mu S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \gamma^\mu - \sum_\mu \gamma^\mu S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Zum Beweis genügt es offenbar, sich auf infinitesimale kanonische Transformationen zu beschränken. Für diese ist $S = 1 + \zeta$, mit unendlich kleiner Matrix ζ, und daher hat man in erster Näherung

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = (1 - \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \zeta}{\partial x^\mu}. \tag{20}$$

Ferner wählen wir das Koordinatensystem für den betrachteten Punkt derart, daß die $g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu$ werden, so daß zwischen Ko- und Kontravarianz nicht unterschieden zu werden braucht und die Gleichungen (1) gelten. Eine beliebige vierreihige Matrix ζ läßt sich darstellen als lineare Form der 16 linear-unabhängigen Matrizen 1, $\mathring{\gamma}_\mu$, $\mathring{\gamma}_\mu \mathring{\gamma}_\nu$, $\mathring{\gamma}_\mu \mathring{\gamma}_\nu \mathring{\gamma}_\varrho$, $\mathring{\gamma}_1 \mathring{\gamma}_2 \mathring{\gamma}_3 \mathring{\gamma}_4$ ($\mu \neq \nu \neq \varrho \neq \mu$), wo $\mathring{\gamma}_\mu$ den Wert von γ_μ in dem betrachteten Punkte bezeichnet, welcher Wert also als konstant zu betrachten ist und nicht differenziert werden muß. Dagegen sind die Koeffizienten der Form irgendwelche Funktionen der Koordinaten. Es ist also

$$\zeta = a + a_1 \mathring{\gamma}_1 + \cdots + a_{12} \mathring{\gamma}_1 \mathring{\gamma}_2 + \cdots + a_{123} \mathring{\gamma}_1 \mathring{\gamma}_2 \mathring{\gamma}_3 + \cdots + a_{1234} \mathring{\gamma}_1 \mathring{\gamma}_2 \mathring{\gamma}_3 \mathring{\gamma}_4,$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x^\mu} = \frac{\partial a}{\partial x^\mu} + \frac{\partial a_1}{\partial x^\mu} \mathring{\gamma}_1 + \cdots + \frac{\partial a_{12}}{\partial x^\mu} \mathring{\gamma}_1 \mathring{\gamma}_2 \\ + \cdots + \frac{\partial a_{123}}{\partial x^\mu} \mathring{\gamma}_1 \mathring{\gamma}_2 \mathring{\gamma}_3 + \cdots + \frac{\partial a_{1234}}{\partial x^\mu} \mathring{\gamma}_1 \mathring{\gamma}_2 \mathring{\gamma}_3 \mathring{\gamma}_4, \end{aligned} \tag{21}$$

* Es ist von der Identität $\frac{\partial S^{-1}}{\partial x^\mu} = - S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} S^{-1}$ Gebrauch gemacht.

wo die $a_{\mu\nu}$, $a_{\mu\nu\varrho}$, $a_{\mu\nu\varrho\sigma}$ zweckmäßig als antisymmetrisch in den Indizes zu betrachten sind, da dasselbe nach (1) für die Produkte $\mathring{\gamma}_1\,\mathring{\gamma}_2$, $\mathring{\gamma}_1\,\mathring{\gamma}_2\,\mathring{\gamma}_3$ usw. gilt, und es dann also auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt, insofern die Indizes an den a entsprechend angeordnet sind. Da nicht weiter differenziert werden soll, können wir jetzt den Index $\circ$ über den γ_μ in (21) wieder fortlassen und erhalten aus der ersten Gleichung (19) für $\mu = 1$, $\nu = 2$, unter Benutzung von (20) und (21) und indem wir mit Hilfe von (1) alle Produkte der γ_μ durch die 16 linear-unabhängigen 1, γ_1, $\ldots \gamma_1\gamma_2$ usw. ausdrücken:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x^1} = -\frac{\partial a_2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial a_3}{\partial x^1} = \frac{\partial a_4}{\partial x^1} = 0, \qquad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{32}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{31}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial a_{42}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{41}}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial a_{341}}{\partial x^1} = -\frac{\partial a_{342}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial a_{1234}}{\partial x^1} = 0.$$

Da Entsprechendes auch für die anderen fünf Indexkombinationen μ, ν gelten muß, folgt

$$\frac{\partial a_1}{\partial x^1} = -\frac{\partial a_2}{\partial x^2} = \frac{\partial a_3}{\partial x^3} = -\frac{\partial a_1}{\partial x^1}$$

und also

$$\frac{\partial a_1}{\partial x^1} = 0,$$

ferner

$$\frac{\partial a_{32}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{31}}{\partial x^2} = -\frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = -\frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = \frac{\partial a_{21}}{\partial x^3} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -\frac{\partial a_{32}}{\partial x^1}$$

und also

$$\frac{\partial a_{32}}{\partial x^1} = 0.$$

Allgemein wird daher

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\varrho} = \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} = \frac{\partial a_{1234}}{\partial x^\varrho} = 0 \quad (\varrho \text{ beliebig}), \tag{22}$$

$$\frac{\partial a_{\mu\nu\varrho}}{\partial x^\varrho} = -\frac{\partial a_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\sigma} \quad (\mu,\ \nu,\ \varrho,\ \sigma \text{ verschieden}). \tag{23}$$

Nach (21) und (22) ist also zu setzen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial a}{\partial x^\mu} + \frac{\partial a_{123}}{\partial x^\mu}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \frac{\partial a_{234}}{\partial x^\mu}\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + \frac{\partial a_{341}}{\partial x^\mu}\gamma_3\gamma_4\gamma_1 + \frac{\partial a_{412}}{\partial x^\mu}\gamma_4\gamma_1\gamma_2. \tag{24}$$

Indem man dies, nach (20), in die zweite der Gleichungen (19) einsetzt, findet man, unter Beachtung von (1), daß diese Gleichung (19) erfüllt ist, wenn

$$\frac{\partial a_{123}}{\partial x_4} - \frac{\partial a_{234}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{341}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{412}}{\partial x_3} = 0 \tag{25}$$

ist. Aus (23), (24) und (25) ergibt sich schließlich

$$\sum_\mu \gamma_\mu \frac{\partial \xi}{\partial x^\mu} = \sum_\mu \gamma_\mu \frac{\partial a}{\partial x^\mu}. \tag{26}$$

Weil die beiden Seiten dieser Gleichung, nach Ersatz von γ_μ durch γ^μ, Skalare sind, gilt sie für jedes Koordinatensystem. Also ist (18) erfüllt.

§ 3. Wir wollen jetzt die Differentialgleichungen (14) und (15) aus einem einzigen Variationsprinzip

$$\delta \int\int\int\int \mathfrak{H}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = 0 \tag{27}$$

ableiten und setzen dazu

$$\mathfrak{H} = \omega \sqrt{-g} \left\{ \sum_\mu \gamma^\mu \left(\frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{c} \varphi_\mu \right) - mc \right\} \chi, \tag{28}$$

was offenbar, wie erforderlich, eine skalare Dichte ist. Variation von ω liefert dann unmittelbar die Gleichung (14), Variation von χ dagegen ergibt, nach partieller Integration:

$$\sum_\mu \left(-\frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{c} \varphi_\mu \right) \left(\omega \gamma^\mu \sqrt{-g} \right) - mc\omega \sqrt{-g} = 0, \tag{29}$$

was sich, nach Division durch $\sqrt{-g}$, von (15) durch den Term

$$-\frac{h}{2\pi} \frac{\omega}{\sqrt{-g}} \sum_\mu \frac{\partial \left(\gamma^\mu \sqrt{-g} \right)}{\partial x^\mu}$$

unterscheidet. Es steht nun nichts im Wege, aus den Gleichungen (14) und (29) bzw. aus dem Variationsprinzip (27), (28) ohne weiteres das Erhaltungsgesetz der Elektrizität sowie den Impuls-Energiesatz abzuleiten, genau so, wie es weiter unten geschehen wird. Weil aber (29) nicht wie (15) die „transponierte“ Gleichung zu (14) ist, würden wir nicht, wie es in I geschah, den richtigen Realitätscharakter unserer physikalischen Größen beweisen können*, und dieser würde ihnen dann auch im allgemeinen abgehen. Wir legen deshalb den γ_μ neben den algebraischen Bedingungen (2) noch die Differentialbedingung auf:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\mu \frac{\partial \left(\gamma^\mu \sqrt{-g} \right)}{\partial x^\mu} = 0, \tag{30}$$

wodurch (29) mit (15) gleichbedeutend wird.

* Siehe den Zusatz am Schluß.

In § 2 hatten wir gefordert, daß die erlaubten kanonischen Transformationen die Divergenz und die Rotation von γ_μ ungeändert lassen sollten; darüber hinausgehend, fordern wir also jetzt das Verschwinden der Divergenz, welche Bedingung natürlich durch keine erlaubte kanonische Transformation verletzt werden darf. Man könnte daran denken, auch das Verschwinden der Rotation von γ_μ zu verlangen. Diese Bedingung würde jedoch, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, eine Beschränkung der zu fordernden freien Wählbarkeit des $g_{\mu\nu}$-Feldes bedeuten, indem aus ihr algebraische Beziehungen zwischen den Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors resultieren würden. Wir schreiben also bloß die Bedingung (30) vor, die ja auch genügt, um die beiden Gleichungen (14) und (15) aus dem Variationsprinzip (27), (28) herleiten zu können.

§ 4. Durch Multiplikation von (14) mit $\omega\sqrt{-g}$, von (15) mit $\chi\sqrt{-g}$, und Subtraktion folgt, unter Beachtung von (30), das Erhaltungsgesetz der Elektrizität

$$\sum_\mu \frac{\partial \mathfrak{f}^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{31}$$

mit

$$\mathfrak{f}^\mu = -e\,\omega\,\gamma^\mu\sqrt{-g}\,\chi, \tag{32}$$

was übrigens auch aus (14) und (29), ohne (30), folgen würde.

Den Impuls-Energiesatz leiten wir jetzt ab durch eine infinitesimale Deformation des Koordinatensystems *. Bezeichnen wir mit δa die Variation einer Größe a für einen festgehaltenen, mit $\delta^* a$ diejenige für einen vom Koordinatensystem mitgenommenen Punkt, so gilt für eine skalare Dichte $\mathfrak{H}$

$$\delta\int \mathfrak{H}\,dx = \int \delta^*\mathfrak{H}\,dx \equiv 0 \tag{33}$$

für beliebige Variationen δx^μ, die nur an der Grenze des betrachteten Weltgebietes $\int dx = \int\int\int\int dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4$ verschwinden sollen. Mit

$$\delta^*\gamma^\mu = \sum_\nu \frac{\partial\,\delta x^\mu}{\partial x^\nu}\gamma^\nu - \sum_\nu \delta x^\nu \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\nu},$$

$$\delta^*\varphi_\mu = -\sum_\nu \frac{\partial\,\delta x^\nu}{\partial x^\mu}\varphi_\nu - \sum_\nu \delta x^\nu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu}$$

* Siehe z. B. W. Pauli, Relativitätstheorie, Nr. 23.

findet man für die Variation der Wirkungsgröße (27), nach (28), nachdem man die Ableitungen der δx^μ durch partielle Integration fortgeschafft hat:

$$\begin{aligned}\int \delta^* \mathfrak{H}\, d x = \sum_{\lambda,\mu} \Big[& -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\omega \sqrt{-g}\, \gamma^\mu \left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{i e}{c}\varphi_\lambda\right)\chi\right\} \\ & - \omega\sqrt{-g}\,\frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\lambda}\left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i e}{c}\varphi_\mu\right)\chi + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\omega\sqrt{-g}\,\gamma^\mu \frac{i e}{c}\varphi_\lambda \chi\right) \\ & - \omega\sqrt{-g}\,\gamma^\mu \frac{i e}{c}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\lambda}\chi\Big]\delta x^\lambda. \qquad (34)\end{aligned}$$

Hierbei ist davon Gebrauch gemacht, daß der Koeffizient von $\delta^*(\omega\sqrt{-g})$ infolge von (14) verschwindet, ebenso wie derjenige von $\delta^*\chi$ infolge von (15) nach partieller Integration. Es muß also der Faktor von δx^λ in (34) Null sein, und unter Berücksichtigung von (31) und (32) findet man

$$\begin{aligned}& \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{c}{i}\,\omega\sqrt{-g}\,\gamma^\mu\left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \chi}{\partial x^\lambda} + \frac{i e}{c}\varphi_\lambda \chi\right)\right\} \\ & + \sum_\mu \frac{c}{i}\,\omega\sqrt{-g}\,\frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\lambda}\left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} + \frac{i e}{c}\varphi_\mu \chi\right) \\ & + \sum_\mu \mathfrak{j}^\mu \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 0. \qquad (35)\end{aligned}$$

Der letzte Term stellt die elektromagnetische Viererkraft auf die Volumeneinheit dar, die geschweifte Klammer im ersten Gliede wäre daher als der Impuls-Energietensor des Elektrons anzusehen, während dann das zweite Glied die vom Gravitationsfeld ausgeübte Viererkraftdichte wäre; nur haben die letztgenannten beiden Größen noch nicht den richtigen Realitätscharakter. Um dies zu erreichen, ersetzen wir $\mathfrak{H}$ durch die Größe $\mathfrak{H}'$, die daraus nach partieller Integration entsteht und die mit ebengleicher Berechtigung als Dichte der Wirkungsfunktion betrachtet werden kann:

$$\mathfrak{H}' = \left\{\sum_\mu \left(-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} + \frac{i e}{c}\varphi_\mu \omega\right)\gamma^\mu - m c\,\omega\right\}\sqrt{-g}\,\chi, \qquad (36)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}& \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{c}{i}\left(-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \omega}{\partial x^\lambda} + \frac{i e}{c}\varphi_\lambda \omega\right)\sqrt{-g}\,\gamma^\mu \chi\right\} \\ & + \sum_\mu \frac{c}{i}\left(-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} + \frac{i e}{c}\varphi_\mu \omega\right)\sqrt{-g}\,\frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\lambda}\chi \\ & + \sum_\mu \mathfrak{j}^\mu \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 0. \qquad (37)\end{aligned}$$

Durch Bildung des arithmetischen Mittels von (35) und (37) findet man schließlich

$$\sum_\mu \frac{\partial \mathfrak{T}_\lambda^\mu}{\partial x^\mu} + \sum_\mu \frac{c}{2}\left\{\omega \frac{\sqrt{-g}}{i}\frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\lambda}\left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} + \frac{i e}{c}\varphi_\mu \chi\right)\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \omega}{\partial x^\lambda} + \frac{i e}{c}\varphi_\mu \omega\right)\frac{\sqrt{-g}}{i}\frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\lambda}\chi\right\} + \sum_\mu \mathfrak{j}^\mu \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 0, \qquad (38)$$

mit

$$\mathfrak{T}_\lambda^\mu = \frac{c}{2}\omega \frac{\sqrt{-g}}{i}\gamma^\mu\left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \chi}{\partial x^\lambda} + \frac{i e}{c}\varphi_\lambda \chi\right)$$

$$+ \frac{c}{2}\left(-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \omega}{\partial x^\lambda} + \frac{i e}{c}\varphi_\lambda \omega\right)\frac{\sqrt{-g}}{i}\gamma^\mu \chi, \qquad (39)$$

welcher Ausdruck für $g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu$ mit I, (14) übereinstimmt.

In der klassischen Theorie hat man statt des zweiten Gliedes von (38) einen Term

$$-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\mathfrak{T}_{\mu\nu}. \qquad (40)$$

Man könnte versucht sein, durch Abänderung des Tensors $\mathfrak{T}$ aus (39), auch hier den entsprechenden Term auf diese Form zu bringen, indem man die allgemein-kovariante Verallgemeinerung des Flächentensors $T_{\lambda\mu} - T_{\mu\lambda}$ aus I, (16) heranzieht. Dies gelingt jedoch nicht, wie wir jetzt noch zeigen wollen.

Wir wählen ein Koordinatensystem, für das im betrachteten Punkte die $g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu$ sind und das überdies dortselbst geodätisch ist. Es gelten hier die Gleichungen (1) für zwei unendlich benachbarte Punkte, so daß wir sie auch dann noch anwenden dürfen, wenn die γ_μ einmal differenziert werden sollen. Durch genau dieselben Überlegungen, die in I von (14) zu (16) führten, erhalten wir jetzt

$$\frac{2}{c}(T_{\lambda\mu} - T_{\mu\lambda})_{\lambda\neq\mu} = -\frac{h}{2\pi}\sum_{\substack{\nu \\ \lambda\neq\nu\neq\mu}}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x^\nu}\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu\chi + \omega\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu\frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}\right), \qquad (41)$$

und für die Divergenz hiervon

$$\frac{2}{c}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(T_{\lambda\mu} - T_{\mu\lambda})$$

$$= -\frac{h}{2\pi}\sum_{\substack{\mu,\nu \\ \lambda\neq\nu\neq\mu\neq\lambda}}\left\{\frac{\partial \omega}{\partial x^\nu}\frac{\partial(\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu)}{\partial x^\mu}\chi + \omega\frac{\partial(\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu)}{\partial x^\mu}\frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}\right\}. \qquad (42)$$

Aus der Tatsache, daß hier die φ_μ, die in (39) vorkommen und ja nicht durch die besondere Wahl des Koordinatensystems wegtransformiert werden können, fortgefallen sind, schließt man, daß es nicht möglich sein kann, durch Zusatz eines antisymmetrischen Terms

$$\text{Konst.}\ (\mathfrak{T}^{\lambda\mu} - \mathfrak{T}^{\mu\lambda})$$

zu unserem ursprünglichen Tensor $\mathfrak{T}^{\lambda\mu}$ aus (39) die Viererkraftdichte des Gravitationsfeldes auf die Form (40) zu bringen.

Zusatz bei der Korrektur. Um die richtigen Realitätseigenschaften der $\mathfrak{j}^{\mu}$ und $\mathfrak{T}^{\mu}_{\lambda}$ nachweisen zu können, wählen wir das Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3 reell, x^4 rein imaginär) so, daß

$$g\, g^{44} = 1, \quad g^{4k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{43}$$

wird. Dies muß im allgemeinen möglich sein, da wir vier Raumzeitfunktionen (die neuen Koordinaten als Funktionen der alten) beliebig wählen können und die linken Seiten in (43) nicht etwa sämtliche Komponenten eines Tensors, oder gar mehrerer Tensoren, bilden. Sodann setzen wir versuchsweise

$$\gamma^4 = \frac{1}{\sqrt{g}}\gamma^0_4, \quad \gamma^k = \sum_{m=1}^{3} a^k_m\, \gamma^0_m, \tag{44}$$

wo die γ^0_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) konstante Hermitesche Matrizen bedeuten, die den Gleichungen (1) genügen, während die a^k_m ($k, m = 1, 2, 3$) „gewöhnliche" Raumzeitfunktionen sein sollen. Die zweite Gleichung (4) ist dann nach (43), (44) für $\mu = 4$, $\nu = 1, 2, 3, 4$ identisch erfüllt. Für $\mu, \nu = 1, 2, 3$ erhalten wir

$$g^{kl} = \sum_{m=1}^{3} a^k_m\, a^l_m \quad (k, l = 1, 2, 3). \tag{45}$$

Da die den g^{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) entsprechende quadratische Differentialform (das räumliche Linienelement) positiv-definit ist, ist (45) durch reelle a^k_m erfüllbar, wie man unmittelbar erkennt, indem man für einen bestimmten Punkt durch Koordinatentransformation $g^{kl} = \delta^l_k$ macht. Also sind alle γ^μ ebenso wie die γ^0_μ hermitesch. Von den neun Funktionen a^k_m sind durch (45) nur sechs bestimmt. Die drei übrigen genügen gerade, die Bedingung (30) zu befriedigen, die für unseren Fall nach (44) durch die drei Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\, a^k_m \sqrt{g}}{\partial x^k} = 0 \quad (m = 1, 2, 3) \tag{46}$$

ausgedrückt wird. Aus (15) folgt jetzt durch Multiplikation mit γ_4^0

$$\left(-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial w}{\partial x^4}+\frac{i e}{c}\varphi_4 w\right)\frac{1}{\sqrt{g}}+\sum_{k=1}^{3}\left(-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial w}{\partial x^k}+\frac{i e}{c}\varphi_k w\right)\gamma^k\gamma_4^0 - m c w \gamma_4^0 = 0, \tag{47}$$

und aus (14), wenn man $\chi = \gamma_4^0 \psi$ setzt,

$$\left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi}{\partial x^4}+\frac{i e}{c}\varphi_4 \psi\right)\frac{1}{\sqrt{g}}+\sum_{k=1}^{3}\gamma^k\gamma_4^0\left(\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi}{\partial x^k}+\frac{i e}{c}\varphi^k \psi\right) - m c \gamma_4^0 \psi. \tag{48}$$

Da wegen (44) auch die $i\gamma^k\gamma_4^0$ ($k = 1, 2, 3$) hermitesch sind, sind (47) und (48) zueinander konjugiert-komplexe Gleichungen und es kann daher w zu $\psi = \gamma_4^0\chi$ konjugiert-komplex gewählt werden. Machen wir dann noch für einen bestimmten Punkt durch Koordinatentransformation $g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu$, so kann man die richtigen Realitätsverhältnisse ebenso wie im spezial-relativistischen Falle dartun, da ja die Ableitungen der γ^μ in den $\mathfrak{s}^\mu$ und $\mathfrak{T}_\lambda^\mu$ nicht vorkommen. Führen wir jetzt eine beliebige Koordinatentransformation aus, so bleiben die Realitätsverhältnisse natürlich richtig.

Die kanonischen Transformationen aber sind nach § 2 auf eine enge Gruppe zu beschränken. Wir können daher für gegebene $g_{\mu\nu}$ nicht ein beliebiges, ihnen nach (2) entsprechendes System der γ_μ annehmen, sondern müssen es, so wie wir es jetzt getan haben, bestimmen, und haben dann nur noch die Wahl zwischen denjenigen, die hieraus durch Koordinatentransformationen sowie durch die nach § 2 zugelassenen kanonischen Transformationen entstehen. Auf gewisse formelle Fragen, die sich hieran knüpfen, können wir jetzt nicht eingehen.